ESONERO DI IDRAULICA - IDRODINAMICA

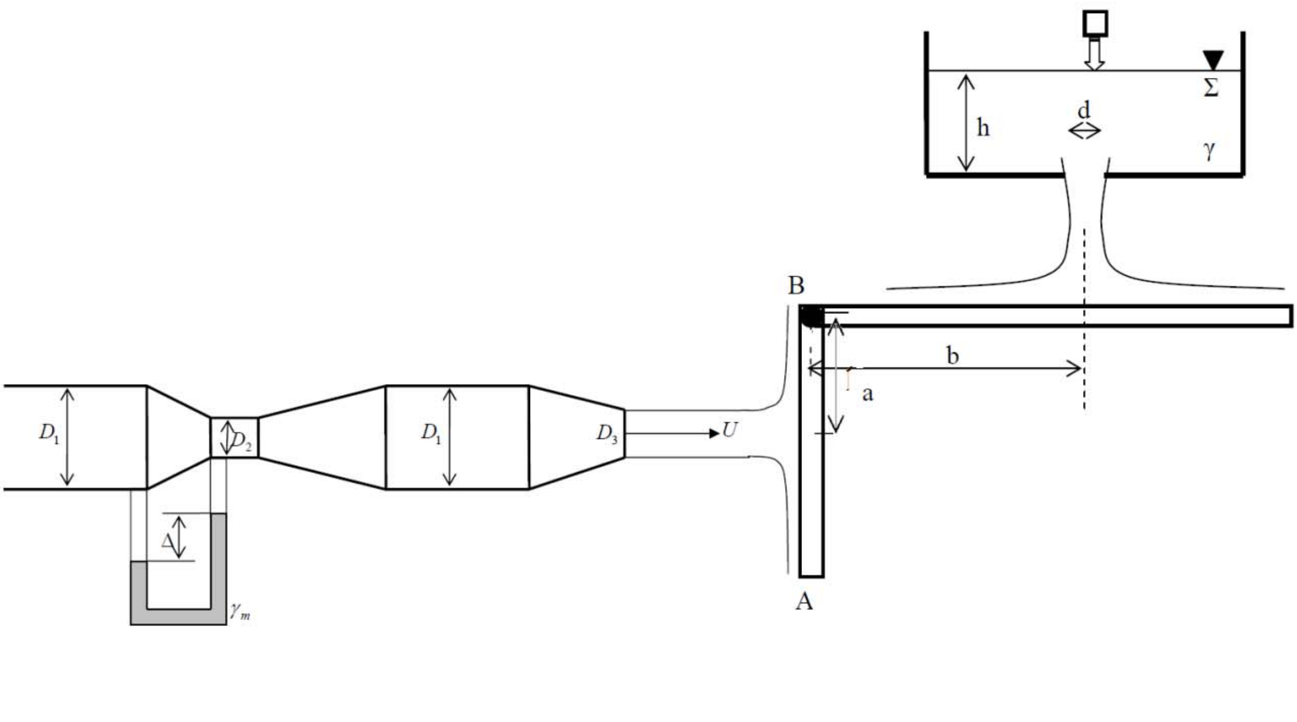
POLITECNICO DI BARI - DICATECh
Dipartimento di Ingegneria Civile, Ambientale, del Territorio, Edile e di Chimica

Un getto d'acqua fuoriesce dal fondo di un serbatoio **Σ** attraverso un'apertura circolare di diametro **d** e urta la lastra **BC** in posizione orizzontale. Il serbatoio è alimentato in modo da garantire un livello d'acqua costante **h**, come riportato in figura. Un secondo getto d'acqua, uscente da una condotta circolare di diametro **D_3**, investe perpendicolarmente la lastra **AB**.
Il venturimetro fornisce una differenza di quota manometrica pari a **Δ** ed il diametro del collo cilindrico del venturimetro è pari a $D_2<D_1$. La sezione di uscita del convergente terminale ha il diametro **D_3**. Si supponga che dal convergente il getto fuoriesca con filetti rettilinei e paralleli.
Supponendo che il sistema **ABC** possa ruotare rigidamente attorno ad un asse passante per la cerniera **B**, si valuti:

1) La spinta esercitata sul convergente posto all'estremità della tubazione orizzontale di diametro D_1, in cui scorre la portata .
2) La spinta idrodinamica che l'acqua esercita sulla lastra **AB**.
3) Il modulo, la direzione e il verso della spinta **S** esercitata dal getto sulla lastra **BC**.
4) Il valore del livello d'acqua costante **h.**

DATI:

γ=9810 N/m^3	a=1.3 m
γ_m=133326 N/m^3	b=1.5 m
Δ=40 cm	d = 0.02 m
D_1=85 cm	C_c=0.65 coefficiente di contrazione per il serbatoio **Σ**
D_2=40 cm	C_v=1 coefficiente di velocità per il serbatoio **Σ**
D_3=60 cm	



$$Q = \frac{A_1 A_2}{\sqrt{A_1^2 - A_2^2}} \sqrt{2g\Delta \frac{\gamma_m - \gamma}{\gamma}}$$

Con

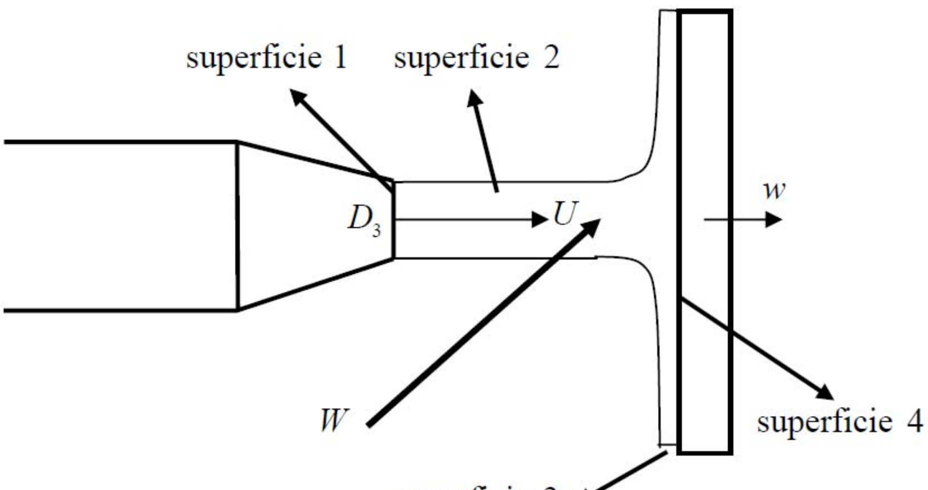
$$A_1 = \frac{\pi D_1^2}{4} = \quad 0.56 \ m^2$$

$$A_2 = \frac{\pi D_2^2}{4} = \quad 0.1256 \ m^2$$

$$Q = \ 1.29 \ \frac{m^3}{s}$$

$$U_3 = \ 4.6 \ \frac{m}{s}$$

Si applichi l'equazione di equilibrio globale al volume di controllo W riportato in figura:



Il volume W è delimitato dalle tre superfici 1,2,3,4, per cui l'equazione di equilibrio è data (condizioni di moto permanente in un sistema di riferimento solidale alla piastra piana):

$$\vec{\Pi}_1 + \vec{\Pi}_2 + \vec{\Pi}_3 + \vec{\Pi}_4 + \vec{G} + \vec{M}_e - \vec{M}_u = \vec{O}$$

Tenendo conto che la superficie 2 è a contatto con l'atmosfera e che la superficie 1 è verticale con il bordo a pressione atmosferica:

$$\vec{\Pi}_4 + \vec{M}_e = \vec{O}$$

$\vec{\Pi}_4$ è la forza esercitata dalla piastra piana sulla superficie , per cui la spinta cercata è pari a:

$$\vec{S} = -\vec{\Pi}_4$$

quindi:

$$\vec{S} = \vec{M}_e$$

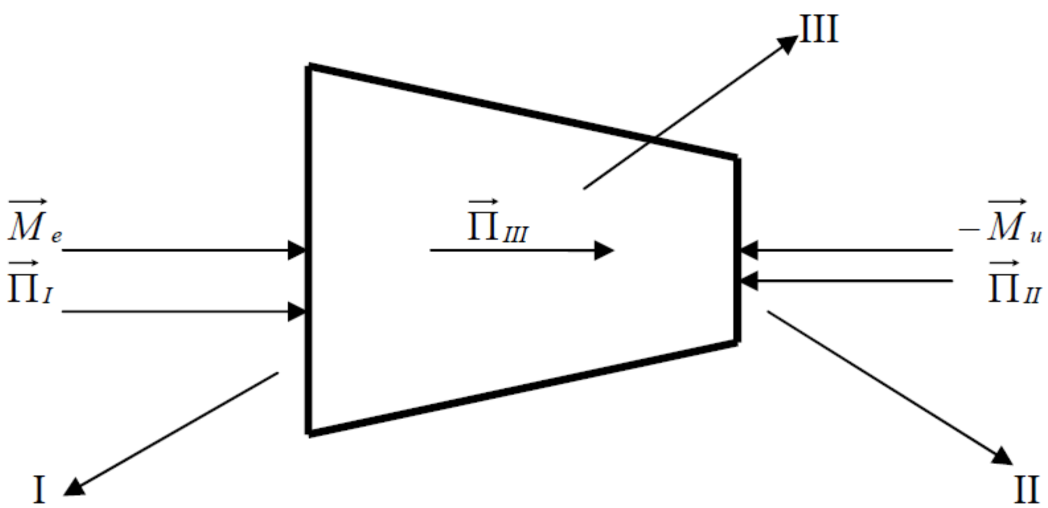
La spinta esercitata sulla piastra è diretta nello stesso verso del flusso della quantità di moto.
In dettaglio:

$$S = M_e = \rho (U_3)^2 A = \rho (U_3)^2 \frac{\pi D_3^2}{4} = 5924 \text{ N}$$

$$\frac{p_I}{\gamma} + \frac{U_1^2}{2g} = \frac{p_3}{\gamma} + \frac{U_3^2}{2g} = \frac{U^2}{2g}$$

$$p_I = \rho \frac{U_3^2 - U_1^2}{2} = 7935 \ Pa$$

Si vuole determinare ora la spinta esercitata sul convergente terminale della tubazione. Si applichi l'equazione di equilibrio globale al volume di controllo fittizio definito dal suddetto convergente:



Il volume è delimitato da tre superfici, per cui:

$$\vec{\Pi}_I + \vec{\Pi}_{II} + \vec{\Pi}_{III} + \vec{G} + \vec{M}_e - \vec{M}_u = \vec{O}$$

Stante la simmetria conica del convergente la forza esercitata dalla superficie *III* è diretta orizzontalmente, e la spinta cercata è pari a:

$$\vec{S}_c = -\vec{\Pi}_{III}$$

per cui:

$$\vec{S}_c = \vec{\Pi}_I + \vec{\Pi}_{II} + \vec{G} + \vec{M}_e - \vec{M}_u$$

Supposto trascurabile $\vec{G}$ (la traccia non fornisce elementi per il suo calcolo), la proiezione lungo l'asse orizzontale dell'equazione fornisce:

$$S_c \approx \left|\vec{\Pi}_I\right| - \left|\vec{\Pi}_{II}\right| + \left|\vec{M}_e\right| - \left|-\vec{M}_u\right|$$

tenuto conto che la superficie *II* è a contatto con l'atmosfera e supponendo ivi i filetti rettilinei e paralleli:

$$S_c \approx \left|\vec{\Pi}_I\right| + \left|\vec{M}_e\right| - \left|-\vec{M}_u\right|$$

per cui si devono valutare i singoli termini al secondo membro.
Si ha:

$$\left|\vec{\Pi}_I\right| = p_I A_I = p_I \frac{\pi D_1^2}{4} = 4443.6 \text{ N}$$

$$\left|\vec{M}_e\right| = \rho \frac{4Q^2}{\pi D_1^2} = 2962 \text{N}$$

$$\left|-\vec{M}_u\right| = \rho \frac{4Q^2}{\pi D_2^2} = 5924.8 \text{N}$$

e la spinta vale:

$$S_c = 1480.8 \text{N}$$

$$S_{AB} \cdot a = S_{BC} \cdot b$$

da cui si ottiene

$$S_{BC} = \frac{S_{AB} \cdot a}{b} = 5134\text{N}$$

$$S_{BC} = \rho U_1^2 A_1 .$$

Essendo

$$A_1 = C_C \frac{\pi d^2}{4} = 0.0002 \ m^2$$

$$U_1 = 160.8 \text{ m/s}$$

La velocità U_1 è invece ottenibile dall'applicazione del teorema di Bernoulli tra la sezione contratta, di ingresso del volume di controllo, ed un punto di liquido nel serbatoio Σ posto a distanza sufficientemente elevata dal foro (in modo da poterne trascurare la velocità). Indicando per il secondo punto le varie quantità senza utilizzare pedici, si ha

$$z_1 + \underbrace{\frac{p_1}{\gamma}}_{0} + \frac{U_1^2}{2g} = \underbrace{z + \frac{p}{\gamma}}_{h} + \underbrace{\frac{U^2}{2g}}_{0} .$$

Valutando le quote dal fondo del serbatoio ed osservando che la distanza di quest'ultimo dalla sezione contratta è trascurabile, ossia $z_1 \approx 0$, si ottiene

$$\frac{U_1^2}{2g} = (h - z_1) \approx h$$

$$U_1 = \sqrt{2gh}$$

$$h = 1307 \text{ m}$$