

Giornate di studio in onore del Prof. Edoardo Orabona

nel centenario della nascita

Bari, 13-14 ottobre 1997



EDITORIALE BIOS

MODELLI DI INTERPRETAZIONE DEL CAMPO DI VELOCITÀ DI ONDE REGOLARI

L. Damiani, F. De Serio, M. Mossa, A. F. Petrillo

Dipartimento di Ingegneria delle Acque - Politecnico di Bari

Sommario

Il presente lavoro esamina alcuni modelli di interpretazione del campo di moto di onde regolari, distinguendo i metodi matematici rigorosi, derivati dalle teorie stokiane, dai metodi cosiddetti ingegneristici, dedotti dalla teoria di Airy. Allo scopo di fornire un quadro completo e immediato delle loro principali caratteristiche, se ne illustrano in dettaglio le ipotesi di validità e le relazioni proposte. Si riportano inoltre i risultati forniti da indagini sperimentali eseguite nel canale ondogeno bidimensionale del Dipartimento di Ingegneria delle Acque del Politecnico di Bari, alla luce dei quali è stato possibile validare i metodi investigati.

1. Introduzione

Sono numerosi in letteratura i modelli capaci di interpretare un campo di moto ondoso, a conferma della loro importanza nello studio previsionale dei fenomeni costieri ovvero delle azioni dinamiche sulle strutture marittime.

Questa continua ricerca di teorie sempre più innovative, sofisticate e rigorose risulta però poco significativa se non è al contempo supportata da sufficienti indagini sperimentali. Soltanto le misurazioni effettuate in situ o in laboratorio consentono, infatti, di verificare la reale validità dei modelli in questione e di dedurre il campo di applicabilità e il grado di approssimazione.

Da tempo si sono ravviate le difficoltà di delimitare le regioni di validità delle teorie disponibili ([5], [10]), l'impossibilità da parte di un'unica teoria di descrivere con la stessa accuratezza tutte le caratteristiche del campo di moto ([5], [7]), l'eccessiva astrazione matematica prodotta da ipotesi spesso restrittive. Tuttavia, soltanto recentemente si sono potuti testare efficacemente alcuni modelli, non appena le moderne tecniche sperimentali hanno consentito un'attendibile valutazione delle componenti di velocità di onde generate artificialmente.

Nel laboratorio del Dipartimento di Ingegneria delle Acque del Politecnico di Bari sono state effettuate alcune indagini sul campo di moto ondoso regolare generato in un canale bidimensionale con fondo acclive, eseguendo simultanea-

mente misure di velocità, tramite anemometro laser Doppler, e di elevazione mediante sonda resistiva.

I risultati analizzati in questo lavoro si riferiscono a onde di Stokes non lineari (II e III ordine secondo quanto indicato dai classici abachi di riferimento di Lè Mèhaut e Iwagaki [13]), con altezze alla massima profondità (70 cm) variabili da 10 a 15 cm e periodi intorno a 1.5 s. Le modalità sperimentali nonché le peculiarità dei punti di misura e dell'apparato nel suo complesso sono state già descritte diffusamente in altri lavori ([1], [3], [4]).

Nelle memorie precedenti ([1], [4]) si è provveduto a presentare i risultati di alcuni modelli di ricostruzione cinematica in acque intermedie, basse e in zona di shoaling, con particolare riferimento alla zona al largo dei frangenti. Con il presente lavoro, ampliando il campo di indagine, si intende illustrare più in dettaglio i metodi già utilizzati e altri riportati in letteratura, analizzando le relazioni che compaiono nei diversi modelli, in modo da fornire un quadro chiaro e immediato delle loro principali differenze.

2. Stato dell'arte

In letteratura, una volta constatati e riconosciuti sia i meriti che i limiti delle teorie classiche (Airy, Stokes al II e III ordine) utilizzate per la ricostruzione del campo di moto ondoso, si sono suggeriti sostanzialmente due filoni di approfondimento.

Il primo promuove il ricorso all'approccio teorico rigoroso, ovvero alla definizione di modelli che abbiano fondamento proprio nelle teorie stokiane ma siano in grado, grazie a ulteriori elaborazioni, di superarne i limiti. In particolare, Gudmestad e Connor [8] attraverso misure in zona off-shore eseguite con apparecchiatura laser, hanno rilevato una certa inconsistenza delle teorie classiche delle onde regolari. A esempio, rispetto ai dati sperimentali, i valori teorici delle velocità orizzontali delle particelle liquide sono risultati sensibilmente sovrastimati in corrispondenza della cresta e sottostimati in corrispondenza del cavo, soprattutto alle maggiori profondità. A questa categoria di modelli appartiene quello proposto da Fenton [6] che sviluppa una soluzione della teoria di Stokes al V ordine valida anche per tutte le onde di ordine inferiore.

Il secondo tipo di indagine tende alla ricerca di metodi semplificati, definiti ingegneristici. Tali metodi modificano i principali assunti della teoria lineare di Airy, dalla quale prendono le mosse, mediante approssimazioni che derivano da osservazioni sperimentali, dunque non sempre basate su un approccio strettamente idrodinamico. Numerosi Autori, quindi, hanno derivato dalla teoria di Airy modelli in grado di fornire risultati apprezzabili anche al di fuori del campo di accettabilità della teoria lineare stessa. In particolare, sebbene la soluzione lineare di Airy non abbia validità alcuna al di sopra del livello medio marino, essa è stata spesso utilizzata per calcolare le componenti di velocità in cresta.

Nonostante il carattere empirico, questi metodi ingegneristici forniscono un contributo decisivo allo studio della cinematica del moto ondoso ed evidenzia-

no alcuni punti di forza comuni: semplificazione delle procedure matematiche e determinazione delle componenti di velocità attraverso la conoscenza del profilo di superficie, di più agevole misurazione.

3. Metodi analizzati

In questo lavoro verranno esaminati i seguenti modelli di interpretazione del campo di moto ondoso, contrassegnati per comodità con opportune sigle: soluzione di Fenton (ST V), metodo di Koyama e Iwata lineare (LTD, ovvero lineare nel dominio del tempo), metodo modificato di Koyama e Iwata (MTD, ovvero modificato nel dominio del tempo), metodo di Wheeler (WH I), metodo di Chakrabarti (CH I), metodo di Wheeler al secondo ordine di approssimazione (WH II), metodo di Chakrabarti al secondo ordine di approssimazione (CH II), metodo lineare con uso dell'algoritmo FFT (LFD, ovvero lineare nel dominio delle frequenze).

3.1. Soluzione di Fenton

Per applicazioni pratiche, Fenton [6] suggerisce il ricorso a una teoria approssimata, derivata dalla teoria di Stokes in acque a profondità costante. Il suo contributo è stato fondamentale. Infatti lo stesso Stokes aveva utilizzato come parametro dell'espansione in serie di Fourier della funzione potenziale di velocità il termine ak , in cui $k=2\pi/L$ è il numero d'onda e a è una scala delle lunghezze, definita come l'ampiezza dell'onda di ordine minore. Successivamente, altri studiosi hanno osservato che tale parametro, crescente con l'altezza d'onda, limitava la convergenza della serie.

Fenton [6] tenta di ovviare a questo svantaggio assumendo a pari a $H/2$. In questo modo, nella serie il parametro di espansione diviene pari a $kH/2$ e le espressioni dei coefficienti dei termini di ordine superiore diventano funzione soltanto della profondità adimensionalizzata kh . Di conseguenza l'unica incognita del problema è rappresentata dal numero d'onda k , ovvero dalla celerità dell'onda c (della quale k è funzione), che può essere ricavata a priori attraverso la risoluzione numerica di una sola equazione non lineare.

Le espressioni delle componenti di velocità sono state fornite sia nel sistema di riferimento (x', z') in moto con velocità pari alla celerità c , che nel riferimento fisso (x, z) , essendo x la direzione di propagazione dell'onda e z l'asse verticale diretto verso l'alto. Rispetto agli assi (x, z) l'onda è progressiva.

In appendice si riportano le espressioni del profilo di superficie e delle distribuzioni di velocità orizzontali e verticali calcolate nel riferimento (x, z) in modo da evidenziare la dipendenza della soluzione anche dal tempo. Con riferimento ai simboli si ha: z quota generica a partire dal fondo, h profondità media, η elevazione dell'onda, u componente orizzontale di velocità, w componente verticale di velocità, H altezza d'onda, T periodo d'onda, L lunghezza d'onda e $\omega=2\pi/T$ pulsazione.

Da un confronto tra i valori teorici calcolati e quelli sperimentali misurati, lo

stesso autore ha osservato che la teoria risulta valida solo nel rispetto della condizione $L < 10h$. Superato questo limite, è necessario il ricorso alla teoria cnoidale. Si noti anche che Rebaudengo Landò e Scarsi [12] hanno sviluppato un modello non lineare per onde random sia unidirezionali che multidirezionali, approssimato al terzo ordine, dedotto proprio dal metodo di Fenton per onde regolari.

Le esperienze condotte nel Dipartimento di Ingegneria delle Acque ([1], [4]) hanno evidenziato che la soluzione di Fenton interpreta bene i dati sperimentali soprattutto in sezioni distanti dal frangimento. Aumentando la ripidità dell'onda, la ricostruzione mostra invece i suoi limiti.

Per un'analisi approfondita dei risultati ottenuti si rimanda al paragrafo 4. A puro titolo esemplificativo, ma a conferma di quanto affermato in precedenza, si riportano gli spettri di ampiezza delle componenti orizzontali di velocità rispettivamente misurati e ricostruiti, relativi al punto della sezione 76 a quota $z=52.1$ cm (Fig. 1), e al punto della sezione 56 a quota $z=21.0$ cm, ovvero in zona di shoaling (Fig. 2). Dalle due figure si osserva l'ottima interpretazione dei risultati sperimentali nel punto della sezione 76, mentre in prossimità del frangimento, ovvero lì dove si hanno elevate ripidità, i valori calcolati si discostano da quelli sperimentali, pur essendo ancora accettabile l'approssimazione ottenuta.

È opportuno sottolineare il notevole miglioramento apportato nella ricostruzione del campo di moto dalla soluzione di Fenton, rispetto alle soluzioni classiche [14] delle onde stokiane con le quali è direttamente confrontabile ([1], [4]). Si ricordi infatti che la soluzione proposta da Fenton fornisce buoni risultati nell'interpretazione sia di onde non lineari del V ordine che di tutte quelle di ordine inferiore. Non altrettanto può dirsi per le soluzioni classiche le quali evidenziano i propri limiti se applicate a onde di ordine inferiore rispetto al grado di espansione della serie prescelto. Per queste ragioni, pur avendo sviluppato il calcolo delle componenti di velocità con altri metodi validi per onde stokiane di ordine superiore, nel seguito non verranno illustrati i risultati ottenuti, affetti da errori piuttosto consistenti, ritenendo i suddetti metodi superati da quello proposto da Fenton.

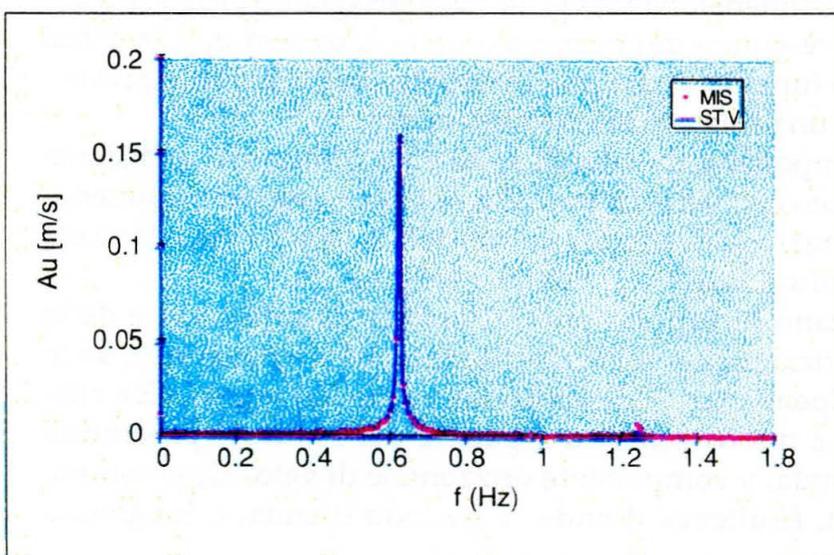


Fig. 1 - Spettro di ampiezza delle u rispettivamente sperimentale e ricostruito con ST V; sezione 76; $z=52.1$ cm

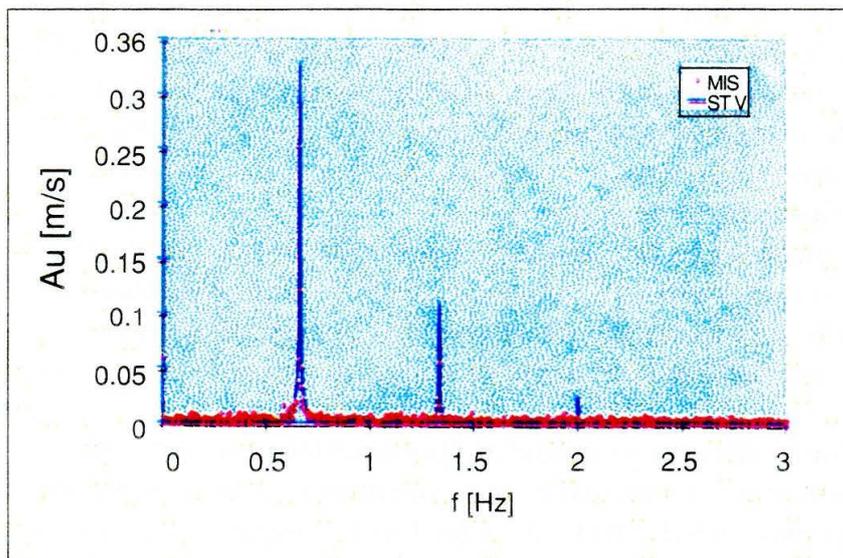


Fig. 2 - Spettro di ampiezza delle u rispettivamente sperimentale e ricostruito con ST V; sezione 56; $z=21.0$ cm

3.2. Metodi di Koyama e Iwata

Il primo metodo approssimato oggetto della presente indagine, che trae origine dalle teorie classiche e consente una rappresentazione piuttosto fedele del campo di moto, è quello proposto da Koyama e Iwata [11]. L'aspetto innovativo di questo approccio, caratterizzato da semplici procedure di calcolo, consiste nella ricerca di un legame funzionale diretto, nel dominio del tempo, tra le elevazioni dell'onda e le componenti di velocità. È evidente come ai fini meramente pratici sia auspicabile lo sviluppo di simili teorie, risultando più agevole misurare in situ le elevazioni dell'onda piuttosto che le velocità orbitali delle particelle. Con questo intento, i due Autori hanno proposto le seguenti relazioni:

$$\begin{aligned}
 u(t) &= H_u(h, T, z) \eta(t) \\
 w(t) &= H_w(h, T, z) \eta(\Delta t)
 \end{aligned}
 \tag{1}$$

in cui Δt è l'intervallo di tempo necessario affinché l'onda passi dal valore zero-upcrossing al valore massimo, H_u e H_w sono le funzioni di trasferimento e la serie storica delle elevazioni costituisce il dato di input del procedimento. Il problema consiste dunque nel determinare le funzioni di trasferimento H_u e H_w . In un primo tempo sono state utilizzate due funzioni lineari (da cui la denominazione LTD), ovvero si è posto:

$$\begin{aligned}
 H_u(h, T, z) &= \frac{2 \pi \cosh kz}{T \sinh kh} \\
 H_w(h, T, z) &= \frac{2 \pi \sinh kz}{T \sinh kh}
 \end{aligned}
 \tag{2}$$

Per $\Delta t=T/4$ e in corrispondenza di un profilo di superficie $\eta(t)$ relativo a onde di piccola ampiezza le (1) coincidono con le corrispondenti relazioni della teoria di Airy. Successivamente, per consentire una migliore rappresentazione della dissimetria dell'onda in prossimità del frangimento, è stato introdotto un termine correttivo derivato dalla stream function di Dean. Le (2) quindi si modificano (MTD) come riportato in appendice.

La sovrastima della componente orizzontale di velocità in corrispondenza delle creste, riscontrata con il metodo LTD, subisce con l'MTD un abbattimento grazie all'introduzione delle due funzioni correttive f e g , le quali tengono conto proprio di quella dissimetria dell'onda in zona di shoaling causa principale di stime distorte.

Gli Autori hanno rilevato, attraverso indagini sperimentali, un buon accordo tra MTD e dati di laboratorio, soprattutto con riferimento alle componenti orizzontali di velocità in prossimità del frangimento. Inoltre, hanno utilizzato le funzioni di trasferimento modificate anche nel caso di onde irregolari, attraverso un'analisi delle singole onde valutate con la teoria dello zero-downcrossing, ottenendo risultati apprezzabili.

Dall'analisi sperimentale cui il presente lavoro fa riferimento è emersa una sostanziale omogeneità di risultati sulla frequenza fondamentale delle u , mentre per le sezioni più vicine al frangimento e con particolare riferimento alla prima armonica si è effettivamente osservato l'effetto positivo prodotto dalla correzione MTD alla procedura lineare. Inoltre si è riscontrata una maggiore adeguatezza del metodo MTD, rispetto all'LTD, nel caso di punti prossimi alla superficie libera. Anche in questo caso si riportano due diagrammi esemplificativi, relativi ancora al punto della sezione 76 a quota $z=52.1$ cm e a quello della sezione 56 a quota $z=21.0$ cm. È possibile valutare gli spettri di ampiezza delle u misurati e ricostruiti sia col metodo lineare (Figure 3 e 4) che modificato (Figure 5 e 6). Si noti che per ragioni di brevità sia in questo caso che nei successivi non verranno riportati indicativi spettri di ampiezza delle componenti verticali di velocità, rimandando quindi al paragrafo 4 ogni commento sulle w .

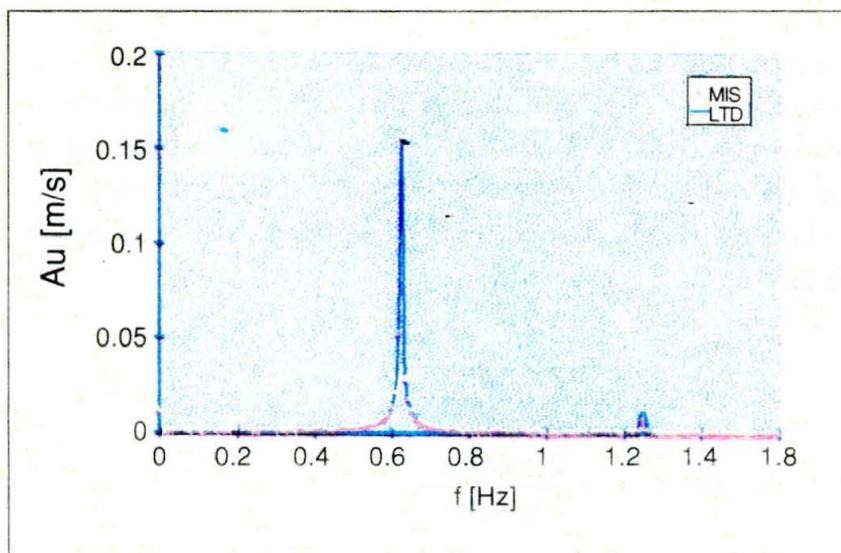


Fig. 3 - Spettro di ampiezza delle u rispettivamente sperimentale e ricostruito con LTD; sezione 76; $z=52.1$ cm

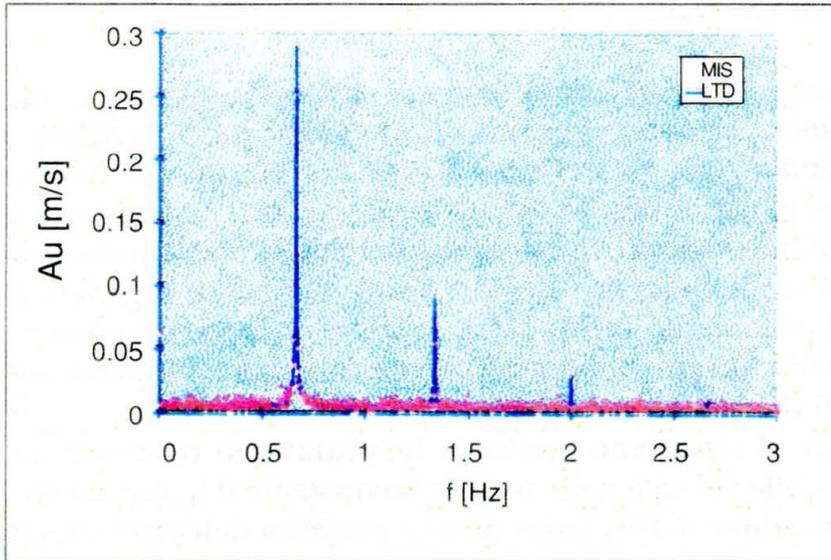


Fig. 4 - Spettro di ampiezza delle u rispettivamente sperimentale e ricostruito con LTD; sezione 56; $z=21.0$ cm

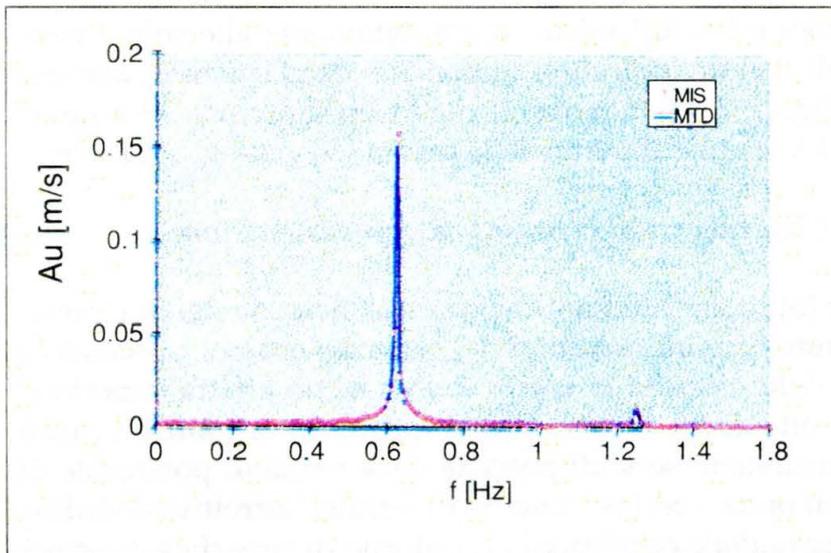


Fig. 5 - Spettro di ampiezza delle u rispettivamente sperimentale e ricostruito con MTD; sezione 76; $z=52.1$ cm

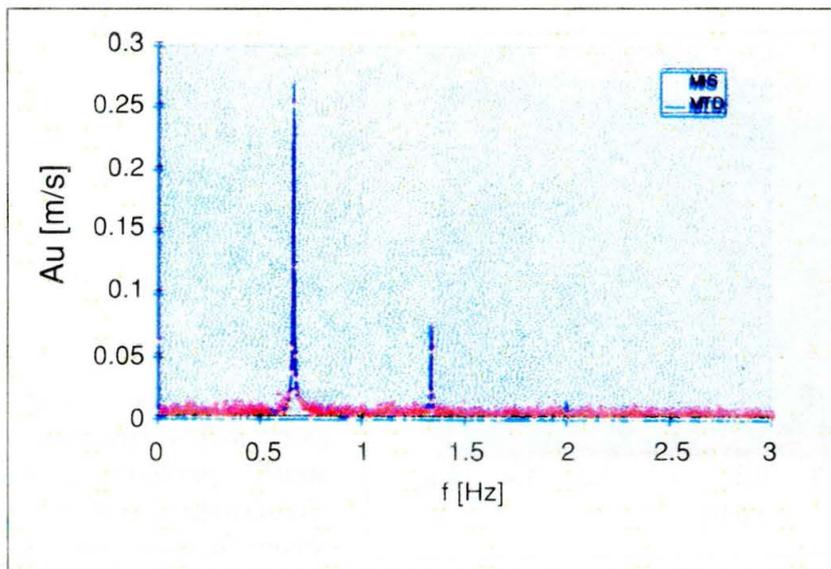


Fig. 6 - Spettro di ampiezza delle u rispettivamente sperimentale e ricostruito con MTD; sezione 56; $z=21.0$ cm

3.3. Metodi di Wheeler e di Chakrabarti

Wheeler [16] ha proposto l'adozione della teoria di Airy nella regione sovrastante il livello medio marino, dopo aver modificato (metodo di *stretching*) l'espressione della profondità, alla luce di risultati ottenuti sul campo. Infatti, sostituendo la quota z del punto di misura (*actual height*) con una corrispondente $zh/(h+\eta)$ (*effective height*) ha ottenuto un miglioramento della distribuzione di velocità. Mediante l'adozione della quota modificata, si riporta il generico punto situato in cresta al di sotto del livello medio mare, rendendo così possibile l'applicazione della teoria lineare. In appendice sono riportate le espressioni assunte dalle componenti orizzontali di velocità.

Sempre in appendice si riportano anche le formulazioni ottenute da Chakrabarti per la stima delle velocità nella regione sovrastante il livello medio marino. La sua approssimazione (CH I) nasce da una modifica dell'espressione della pressione, nel rispetto della condizione al contorno dinamica [8].

Il presente studio ha evidenziato un sostanziale accordo tra i valori calcolati mediante i suddetti metodi e i valori misurati, limitatamente alle sole u nelle sezioni a fondo orizzontale. Per un indicativo andamento degli spettri di ampiezza delle u si vedano le Figure 7 e 9, relative al punto della sezione 76 a quota $z=52.1$ cm, e le Figure 8 e 10, relative al punto della sezione 56 a quota $z=21.0$ cm.

3.4. Metodi di Wheeler e Chakrabarti al II ordine di approssimazione

Gudmestad e Connor [8] hanno studiato un'approssimazione dei due metodi su descritti introducendo termini correttivi del secondo ordine, riuscendo a ottenere una predizione delle velocità in cresta e cavo meno affetta rispettivamente da sovrastime e sottostime. La procedura seguita in entrambi i casi è contraddistinta dall'espansione in serie di potenze delle variabili potenziale di velocità ed elevazione dell'onda, con inserimento di termini correttivi di ordine superiore, e soddisfacimento delle condizioni al contorno di superficie sia cinematica che dinamica fino al richiesto ordine di approssimazione.

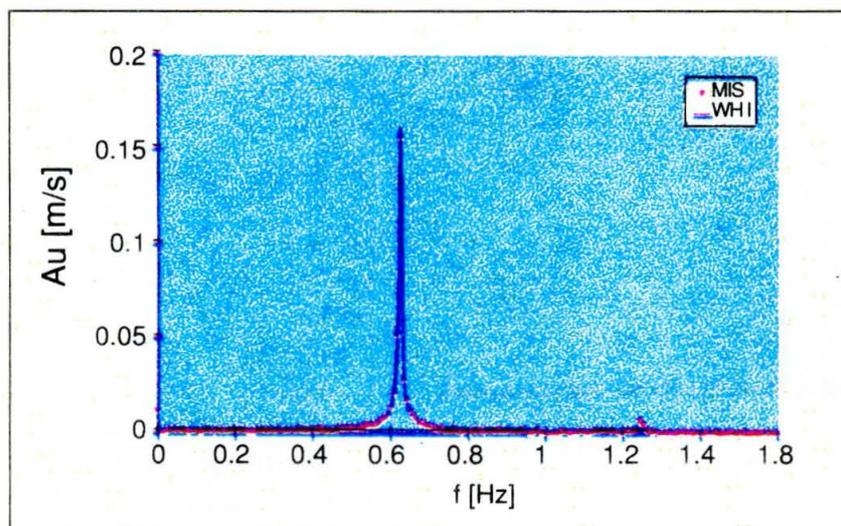


Fig. 7 - Spettro di ampiezza delle u rispettivamente sperimentale e ricostruito con WH I; sezione 76; $z=52.1$ cm

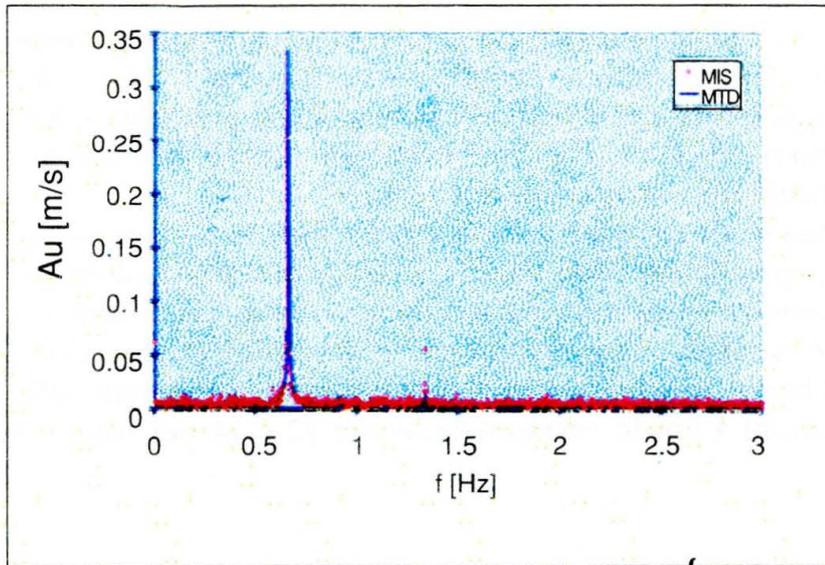


Fig. 8 - Spettro di ampiezza delle u rispettivamente sperimentale e ricostruito con WH I; sezione 56; $z=21.0$ cm

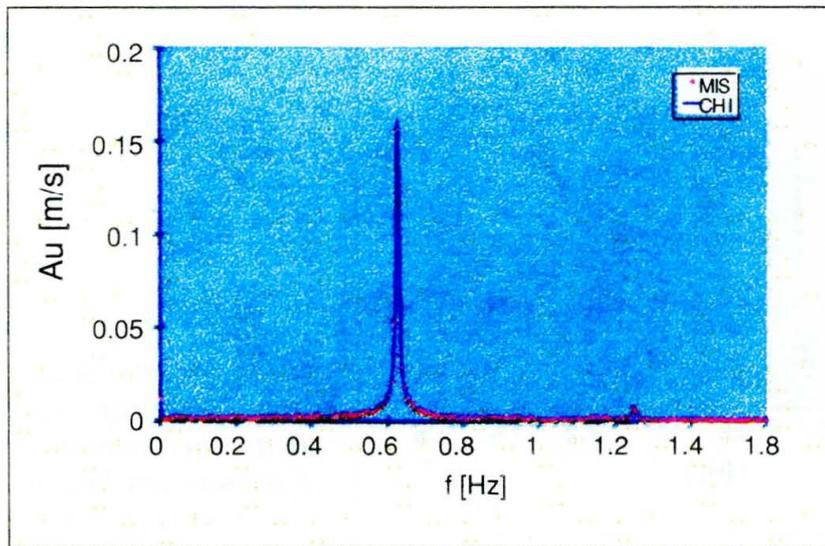


Fig. 9 - Spettro di ampiezza delle u rispettivamente sperimentale e ricostruito con CH I; sezione 76; $z=52.1$ cm

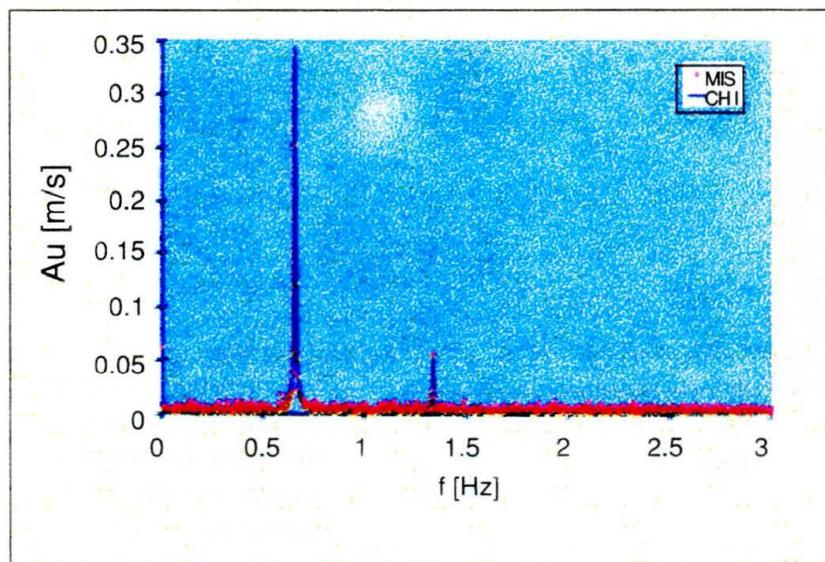


Fig. 10 - Spettro di ampiezza delle u rispettivamente sperimentale e ricostruito con CH I; sezione 56; $z=21.0$ cm

È necessario sottolineare che entrambi i metodi forniscono un'affidabile ricostruzione del campo di velocità soprattutto nel caso di acque intermedie e profonde, poiché l'effetto positivo indotto dai termini correttivi si riduce velocemente al decrescere della quota z di misura. In appendice si indicano le formulazioni relative ai metodi WH II e CH II, riferendosi alle espressioni dell'elevazione e delle velocità orbitali sia orizzontali che verticali.

I dati sperimentali presi in esame mostrano un miglioramento delle ricostruzioni rispetto ai due casi precedenti (WH I e CH I). In particolare dall'esame condotto su tutte le sezioni investigate è emerso che il modello CH II fornisce validi risultati anche in zona di shoaling. Sempre in via esemplificativa, e ricordando che questi spettri hanno validità locale, si può infatti far riferimento alle Figure 11 e 13 per le sezioni a fondo orizzontale, e alle 12 e 14 per quelle a fondo inclinato.

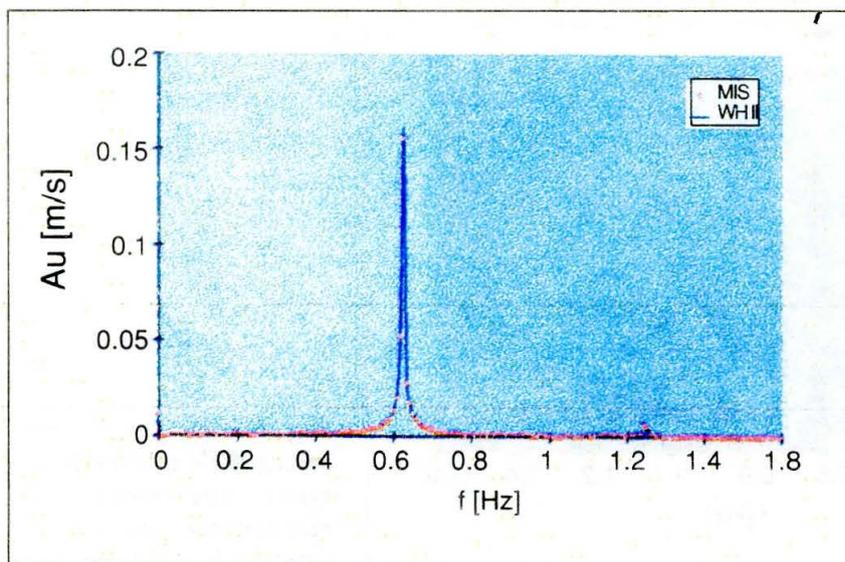


Fig. 11 - Spettro di ampiezza delle u rispettivamente sperimentale e ricostruito con WH II; sezione 76; $z=52.1$ cm

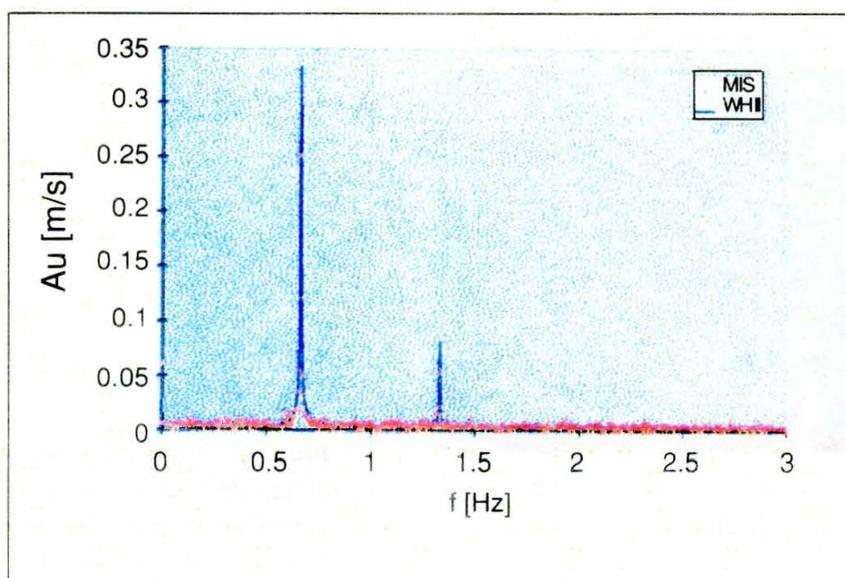


Fig. 12 - Spettro di ampiezza delle u rispettivamente sperimentale e ricostruito con WH; II sezione 56; $z=21.0$ cm

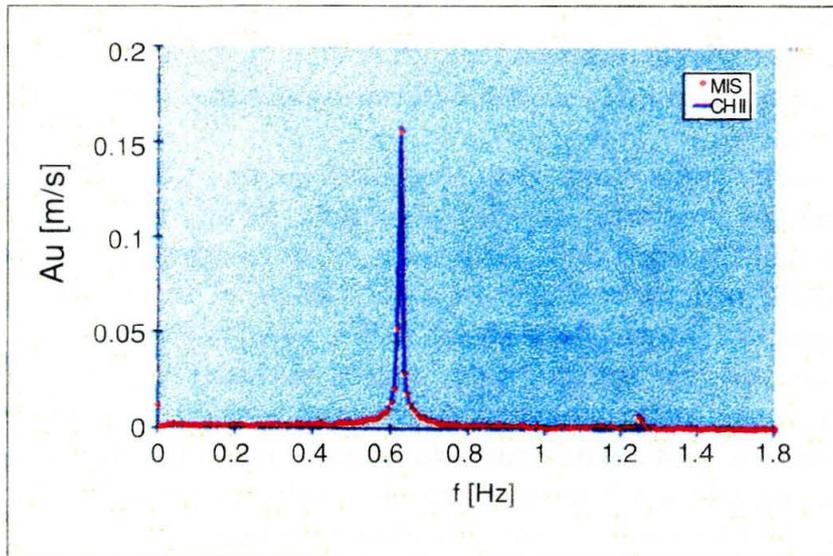


Fig. 13 - Spettro di ampiezza delle u rispettivamente sperimentale e ricostruito con CH II; sezione 76; $z=52.1$ cm

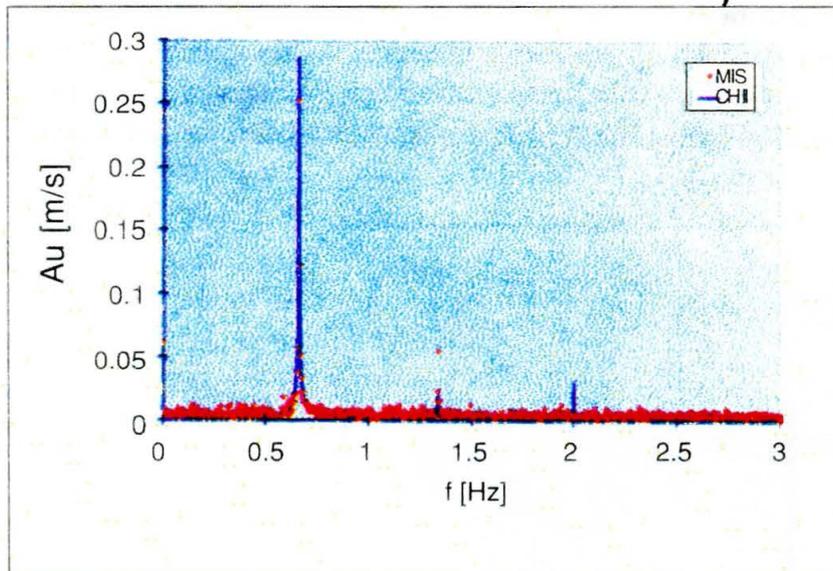


Fig. 14 - Spettro di ampiezza delle u rispettivamente sperimentale e ricostruito con CH II; sezione 56; $z=21.0$ cm

3.5 Metodo lineare nel dominio delle frequenze

L'applicazione delle teorie spettrali a onde sia regolari che irregolari ha consentito ulteriori interessanti approfondimenti nello studio del campo di moto ondoso. Diversi sono stati gli Autori ([9], [15], [17]) che hanno interpretato le singole componenti spettrali dell'onda come onde semplici a comportamento lineare anche nel caso di spettri a banda ampia e onde non lineari, ovvero in situazioni nelle quali il principio di sovrapposizione degli effetti di fatto non dovrebbe valere. A tal proposito si osservi che Guza e Thornton [9], nel caso di onde chiaramente non lineari, sottolineano con enfasi il buon accordo ottenuto tra grandezze caratteristiche del campo di moto ricostruite attraverso la teoria lineare e dati sperimentali.

In particolare Woltering e Daemrich [17] hanno suggerito questo tipo di approccio partendo da un modello lagrangiano, ovvero osservando che il profilo di pelo libero può ottenersi come sovrapposizione lineare delle orbite delle

particelle d'acqua in superficie. In quest'ottica Damiani e Mossa ([1], [3]) hanno esplicitato la funzione lineare di trasferimento tra gli spettri di ampiezza delle elevazioni e quelli delle componenti di velocità dell'onda esaminata, mediante la seguente procedura di calcolo.

Partendo dalla serie storica delle elevazioni, sono stati definiti gli spettri di ampiezza A_η delle elevazioni mediante uso dell'algoritmo FFT (Fast Fourier Transform). Individuate nello spettro delle ampiezze A_η la frequenza fondamentale e le frequenze delle armoniche superiori significative, si sono presi in considerazione degli opportuni intorno delle stesse ($0.9 f_k \div 1.1 f_k$). Per ciascuna frequenza f_i ricadente nei suddetti intorno, nota la corrispettiva $A_{\eta i}$, si sono ricostruite le ampiezze A_{ui} e A_{wi} delle componenti di velocità orizzontale e verticale secondo la teoria lineare, ipotizzando uno sfasamento nullo tra elevazione e velocità orizzontale, uguale a $\pi/2$ tra elevazione e velocità verticale. Per una rapida consultazione delle formule, si rimanda all'appendice.

Il metodo in questione ha fornito risultati apprezzabili, nonostante la sua semplicità e l'ipotesi di validità del principio di sovrapposizione degli effetti su cui si basa. Al largo i suoi risultati approssimano bene i valori sperimentali sia sulla frequenza fondamentale che sulla prima armonica (Figura 15). Anche in zona di shoaling, però, si ottengono buone approssimazioni dei dati sperimentali (Figura 16).

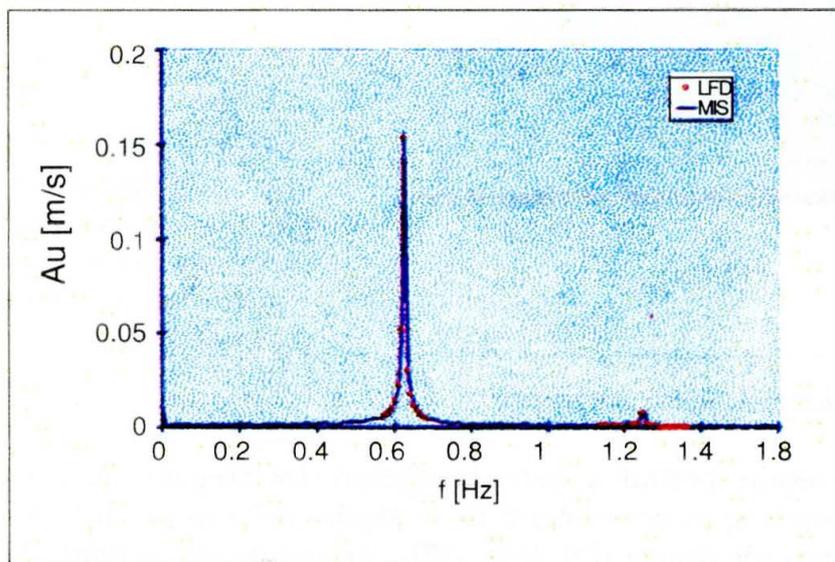


Fig. 15 - Spettro di ampiezza delle u rispettivamente sperimentale e ricostruito con LFD; sezione 76; $z=52.1$ cm

È fondamentale sottolineare l'analogia con il metodo lineare di Koyama e Iwata, il quale tuttavia differisce dal presente modello in quanto associa a ogni suddetta f_i un'onda lineare di lunghezza L invariante, ovvero indipendente dalla frequenza (come riportato nel par.3.2); inoltre il metodo LTD utilizza uno sfasamento temporale ΔT tra w e η ricavato per via empirica (par.3.2). Evidentemente nel caso di onde monocromatiche il metodo LFD e l'LTD forniscono gli stessi risultati. Si ricordi che per onde monocromatiche si intendono quelle onde caratterizzate da un'unica frequenza di picco, mentre si definiscono onde regolari quelle di forma costante nel tempo.

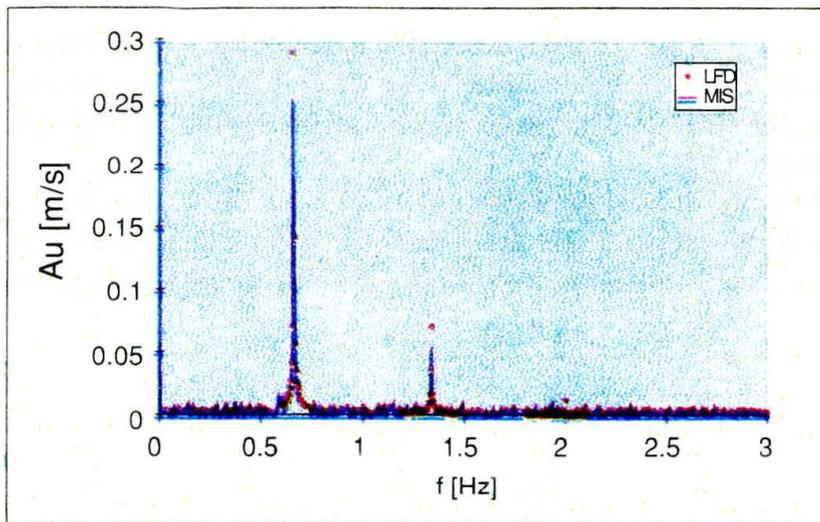


Fig. 16 - Spettro di ampiezza delle u rispettivamente sperimentale e ricostruito con LFD; sezione 56; $z=21.0$ cm

4. Discussione dei risultati

Tutti i metodi finora descritti sono stati testati su un consistente numero di dati sperimentali, secondo le procedure logiche e di calcolo riportate nel presente lavoro. Si sono potuti così valutare serie storiche e spettri di ampiezza delle η , u e w , oggetto dell'indagine in questione, per diverse condizioni del moto al variare del modello di ricostruzione cinematica adottato. In particolare, volendo quantificare l'errore commesso da ciascuna teoria nell'interpretazione della cinematica del moto, si è ritenuto utile ragionare sulle componenti in frequenza degli spettri di ampiezza delle grandezze in esame. A tale scopo, laddove la generica teoria proponeva una soluzione limitatamente al solo dominio del tempo, si è provveduto a una sua trasposizione nel dominio delle frequenze mediante uso dell'algoritmo FFT.

Similmente a quanto fatto da Vis [15] su tutte le componenti spettrali per l'analisi di onde random, si è voluto definire, in questo caso limitatamente ai soli primi due picchi, il seguente errore relativo in valore assoluto:

$$\varepsilon = \frac{|\text{valore teorico} - \text{valore sperimentale}|}{\text{valore sperimentale}}$$

Dunque si è dapprima determinato tale errore relativo in corrispondenza di ciascun caso indagato e per ogni modello di interpretazione. Poi, al fine di superare eventuali inconvenienti dovuti a errori di misura casuali, si è pensato di eseguire, per ciascuna sezione indagata e per ogni metodo di ricostruzione, una media aritmetica degli errori relativi di tutti i punti di interesse, ottenendo così un errore relativo medio caratteristico della sezione stessa, sempre distinguendo i due contributi frequenza fondamentale e prima armonica.

È opportuno sottolineare che, a differenza di quanto avviene nelle sezioni al largo, per i punti delle sezioni in zona di shoaling già compare nello spettro di ampiezza dell'elevazione un terzo picco, a causa delle maggiori deformazioni subite dall'onda sul fondale inclinato, responsabili di un incremento delle non

linearità. Tuttavia esso non è stato considerato nella valutazione degli errori, risultando il suo contenuto energetico talmente basso da renderlo trascurabile. Similmente si è operato per tutte le altre sezioni che approssimano il frangimento, per ragioni di omogeneità.

Per esplicitare i risultati dell'analisi eseguita, si riportano a titolo di esempio nelle Figure 17, 18, 19 e 20 gli istogrammi dell'errore relativo medio delle u e delle w per le sole sezioni 76 e 56, ottenuti per l'onda di caratteristiche $H=15\text{ cm}$ e $T=1.5\text{ s}$.

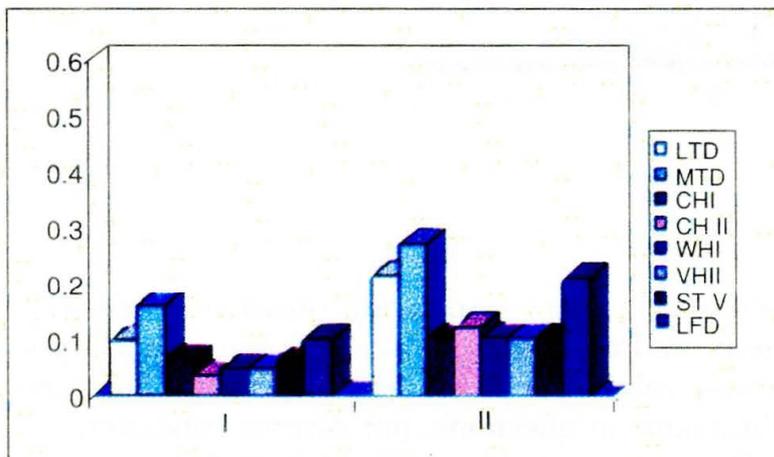


Fig. 17 - Errore relativo medio delle u nella sezione 76 - ($H=15\text{ cm}$, $T=1.5\text{ s}$)

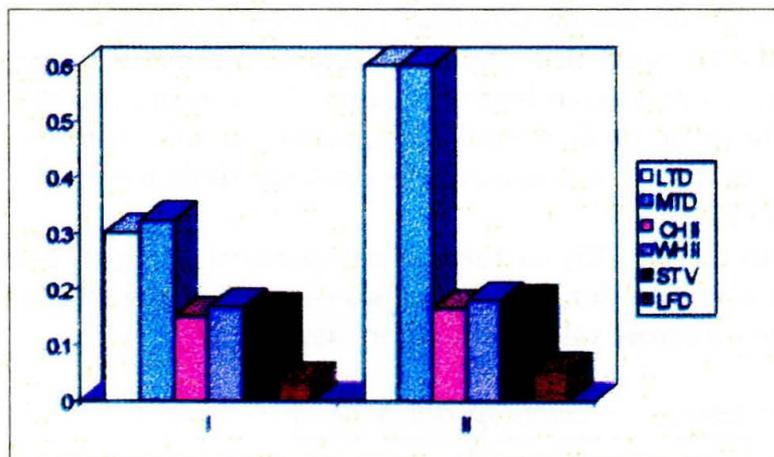


Fig. 18 - Errore relativo medio delle w nella sezione 76 - ($H=15\text{ cm}$, $T=1.5\text{ s}$)

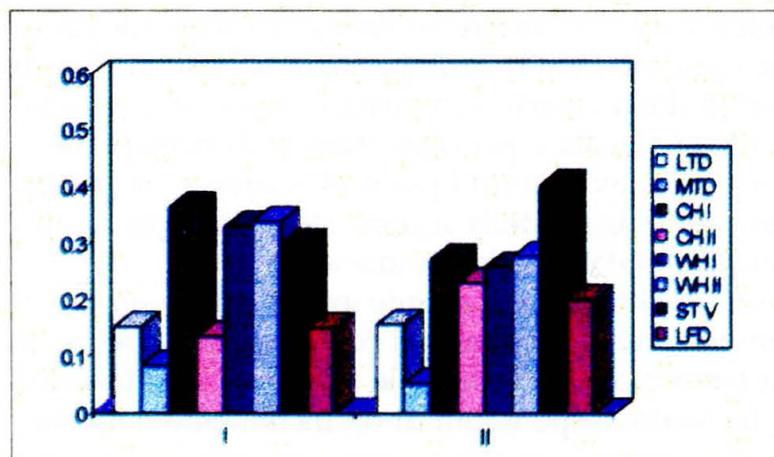


Fig. 19 - Errore relativo medio delle u nella sezione 56 - ($H=15\text{ cm}$, $T=1.5\text{ s}$)

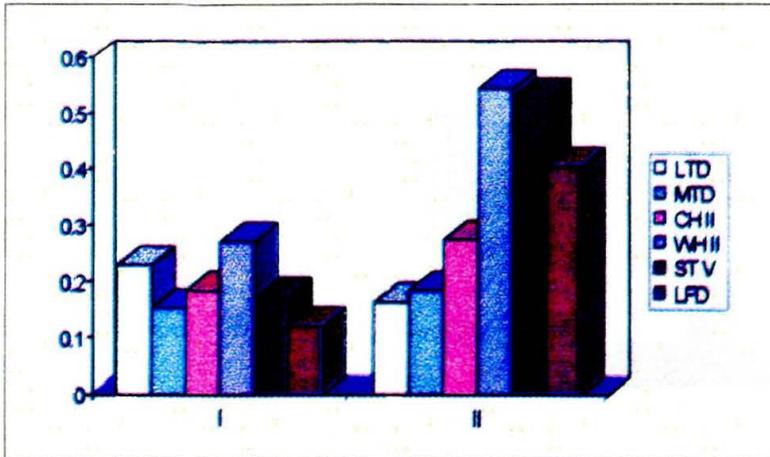


Fig. 20 - Errore relativo medio delle w nella sezione 56 - ($H=15\text{ cm}$, $T=1.5\text{ s}$)

Da un confronto tra le suddette figure emerge chiaramente per le u un sostanziale accordo fra tutte le teorie al largo. In Figura 17 si rileva infatti per entrambi i picchi la presenza di un errore relativo delle u inferiore al 30%. Ancora più basso risulta questo errore se si fa riferimento alla stessa sezione interessata dall'onda di caratteristiche $H=10\text{ cm}$ e $T=1.6\text{ s}$, come si può evincere dalla Figura 21. Emerge anche un incremento generalizzato degli errori relativi delle u sul secondo picco di Figura 17 rispetto alla 21, possibile conseguenza dell'incremento delle non linearità per effetto di un'altezza d'onda ($H=15\text{ cm}$) maggiore, a parità di profondità h .

Similmente, per quanto riguarda le componenti verticali di velocità (il cui ordine di grandezza è sensibilmente inferiore a quello delle componenti orizzontali) si rileva al largo (Figura 22) la presenza di un errore relativo sui due picchi inferiore al 35%, nel caso dell'onda caratterizzata da $H=10\text{ cm}$ e $T=1.6\text{ s}$. Tale errore aumenta per l'onda di altezza $H=15\text{ cm}$ e periodo $T=1.5\text{ s}$ (Figura 18) che si ricorda presenta maggiori non linearità rispetto al primo stato ondoso (a conferma di quanto sottolineato già in precedenti occasioni [2]). In particolare si osservano nelle Figure 22 e 18 rilevanti errori relativi delle w sul secondo picco prodotti dal metodo di Koyama e Iwata sia lineare che modificato. È bene sottolineare, comunque, che per le sezioni al largo il contenuto energetico del secondo picco è tanto basso da poterlo ritenere influente (analogamente a quanto osservato per il terzo picco delle sezioni in zona di shoaling).

Gli stessi due metodi, infatti, applicati nella sezione 56, ovvero laddove il secondo picco ha un senso fisico, danno luogo a errori delle w sul secondo picco notevolmente inferiori (Figura 20). Preme evidenziare l'effetto positivo prodotto in tutti i casi dalle correzioni al secondo ordine del metodo di Chakrabarti, sia per le u che per le w , sia nelle sezioni a fondo orizzontale che in quelle prossime al frangimento. In accordo con le teorie, e da un confronto delle Figure 17, 18 con le 19, 20, si osserva un generale incremento degli errori relativi procedendo dal largo verso il frangimento. In particolare tende ad aumentare l'errore relativo del modello di Fenton, come previsto dallo stesso autore (Figure 19 e 20).

Allo scopo di individuare un trend significativo degli errori lungo il canale, si sono successivamente diagrammati gli errori relativi medi dei singoli metodi

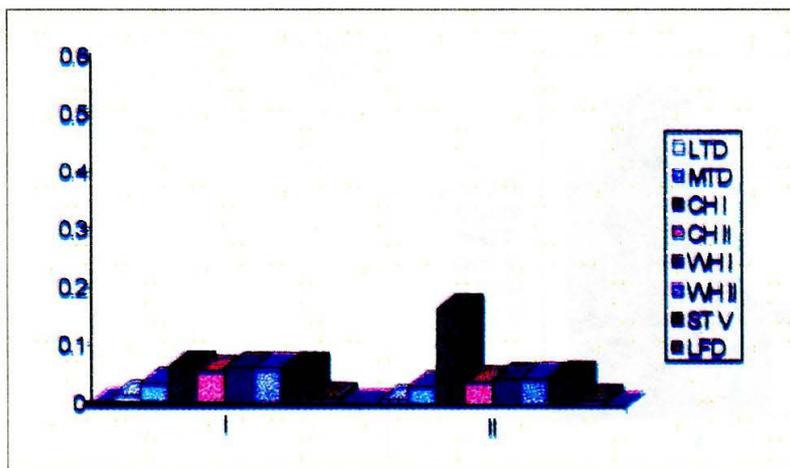


Fig. 21 - Errore relativo medio delle u nella sezione 76 - ($H=10\text{ cm}$, $T=1.6\text{ s}$)

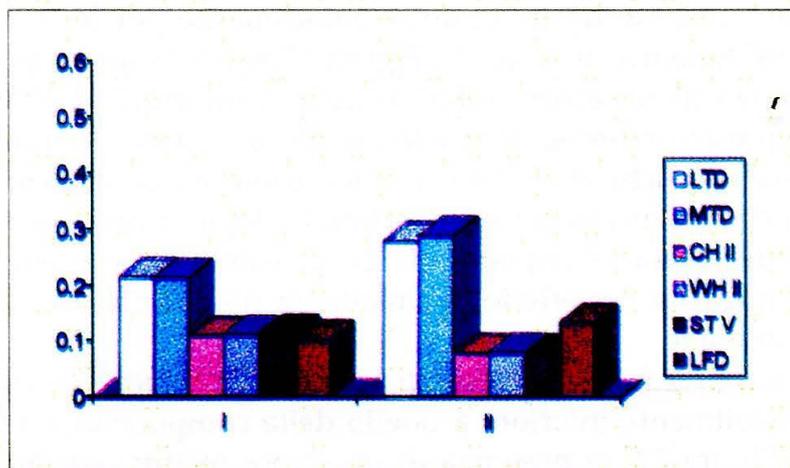


Fig. 22 - Errore relativo medio delle w nella sezione 76 - ($H=10\text{ cm}$, $T=1.6\text{ s}$)

sul primo picco, in funzione della variabile x opportunamente adimensionalizzata con la lunghezza d'onda (calcolata secondo Airy). Si è scelta l'origine dell'asse delle ascisse in corrispondenza della sezione posta 7.5 cm al largo della sezione di misura 77. Nei limiti dell'indagine eseguita in questo lavoro, per le componenti orizzontali di velocità (Figura 23) si osserva la presenza di un errore medio di tutti i metodi analizzati inferiore al 25% per le sezioni a fondo orizzontale e al 40% per le sezioni in prossimità del frangimento. Le percentuali aumentano se si fa riferimento alle componenti verticali di velocità (Figura 24).

Si noti che per brevità nei due grafici in questione sono stati riportati i soli errori medi che riguardano il I picco dello spettro di ampiezza. Mediamente si nota, in particolar modo in Figura 23, un andamento degli errori crescente dal largo verso il frangimento, come era prevedibile attendersi. Infatti, per effetto delle maggiori deformazioni subite dall'onda quando aumenta la sua ripidità, si è verificato un conseguente incremento delle non linearità, che ha inficiato nelle sezioni più vicine al frangimento la ricostruzione cinematica dei modelli adottati.

In Figura 25, con l'obiettivo di fornire un quadro globale degli errori di ciascun metodo indagato nell'interpretazione delle componenti orizzontali di velocità, si sono disegnati per ciascun modello in questione gli istogrammi degli errori medi complessivi, ottenuti cioè come media aritmetica degli errori

concernenti tutti i punti indagati, lungo tutto il canale, avendone preventivamente calcolato il valor medio tra i contributi relativi al I e II picco degli spettri di ampiezza delle u . Analogamente si è operato per le componenti w , come indicato in Figura 26.

Si evince dalla Figura 25 un sostanziale accordo tra tutti i metodi nella riproduzione delle componenti orizzontali di velocità. In particolare forniscono ottimi risultati sia il metodo LFD che il metodo CH II. Inoltre si osserva l'effetto positivo indotto dal metodo MTD rispetto all'LTD. Per le w di Figura 26 si riscontra un generale incremento degli errori, tuttavia ancora LFD e CH II sembrano dar luogo ai risultati migliori.

A questo punto è parso utile rendere immediato, da un punto di vista qualitativo, il raffronto tra i numerosi metodi proposti. È stato perciò necessario adottare un indice comune di riferimento al quale rapportare i singoli errori, mediante la seguente procedura. Per ciascuna sezione di interesse si è individuato il metodo di ricostruzione cinematica in grado di approssimare con la maggiore accuratezza possibile i valori sperimentali (frequenza fondamentale e prima armonica degli spettri di ampiezza) delle u e w .

Esemplificando, da un confronto tra tutte le sezioni indagate, il minimo errore relativo medio delle u sul primo picco è stato fornito dal metodo CH II. Assunto, dunque, per ogni sezione, proprio quest'ultimo (ϵ_{CHII}) come valore di riferimento, tutti i rimanenti errori medi sono stati normalizzati con ϵ_{CHII} . Così, mediante la Figura 27, è possibile valutare di quanto l'errore di ogni metodo di interpretazione si discosti da quello minimo. In maniera analoga si è operato per i valori del I picco delle w , come riportato in Figura 28. Per le componenti verticali di velocità si è assunto come indice di riferimento l'errore minimo ϵ_{LFD} .

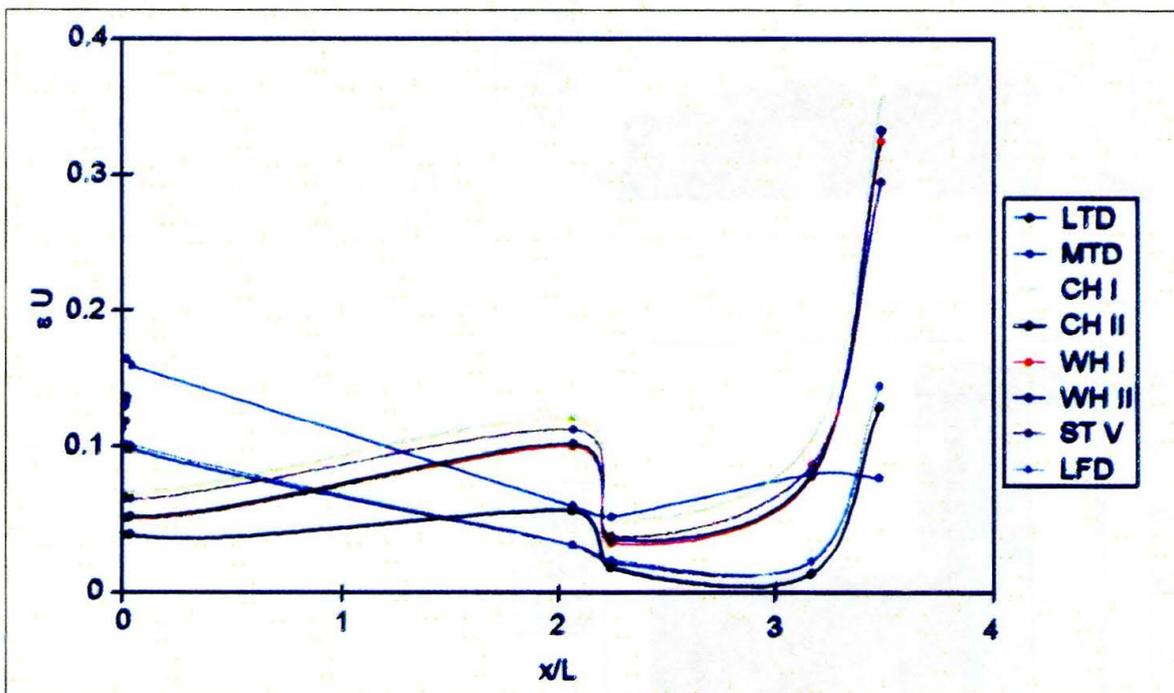


Fig. 23 - Variazione dell'errore medio delle u lungo il canale

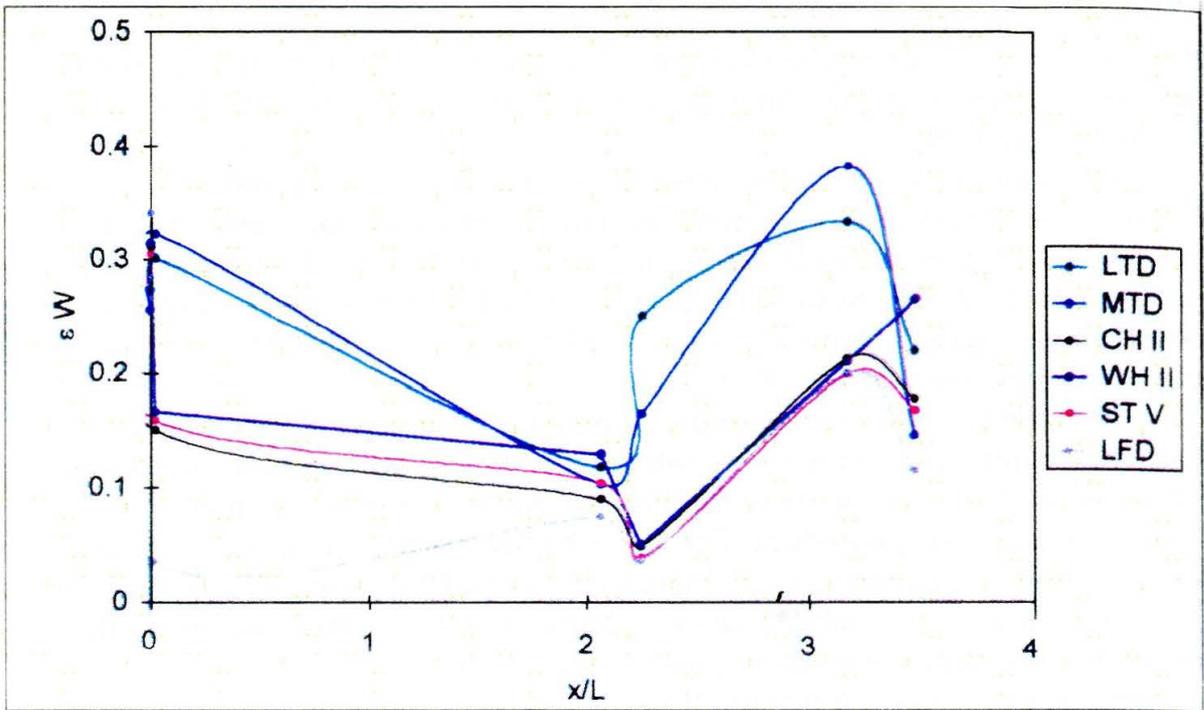


Fig. 24 - *Variazione dell'errore medio delle w lungo il canale*

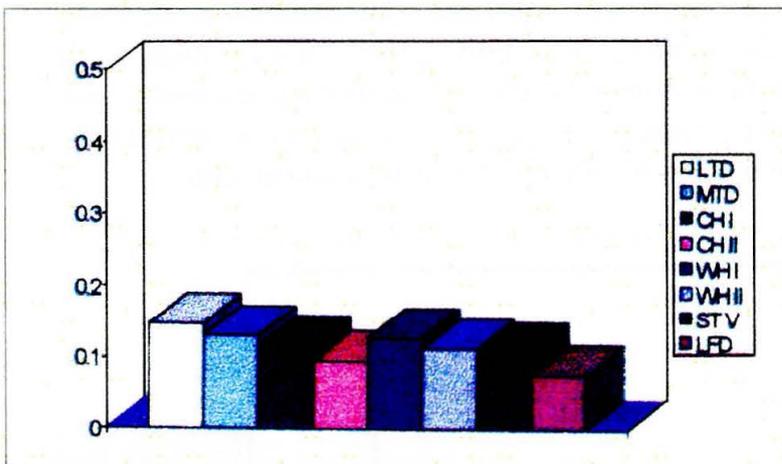


Fig. 25 - *Media complessiva degli errori relativi delle u*

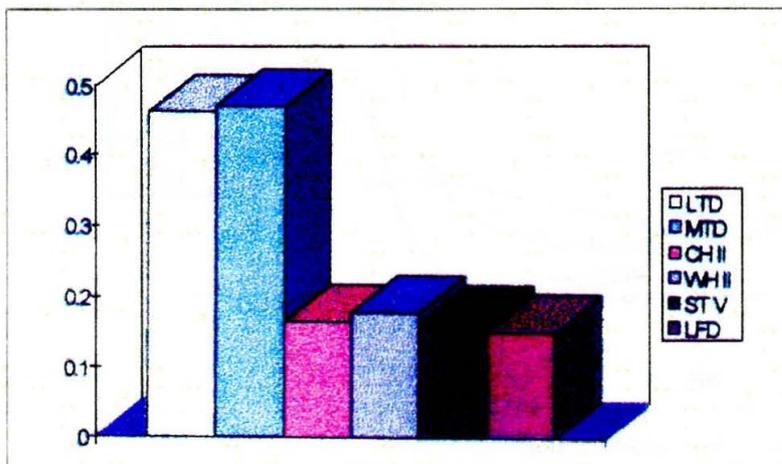


Fig. 26 - *Media complessiva degli errori relativi delle w*

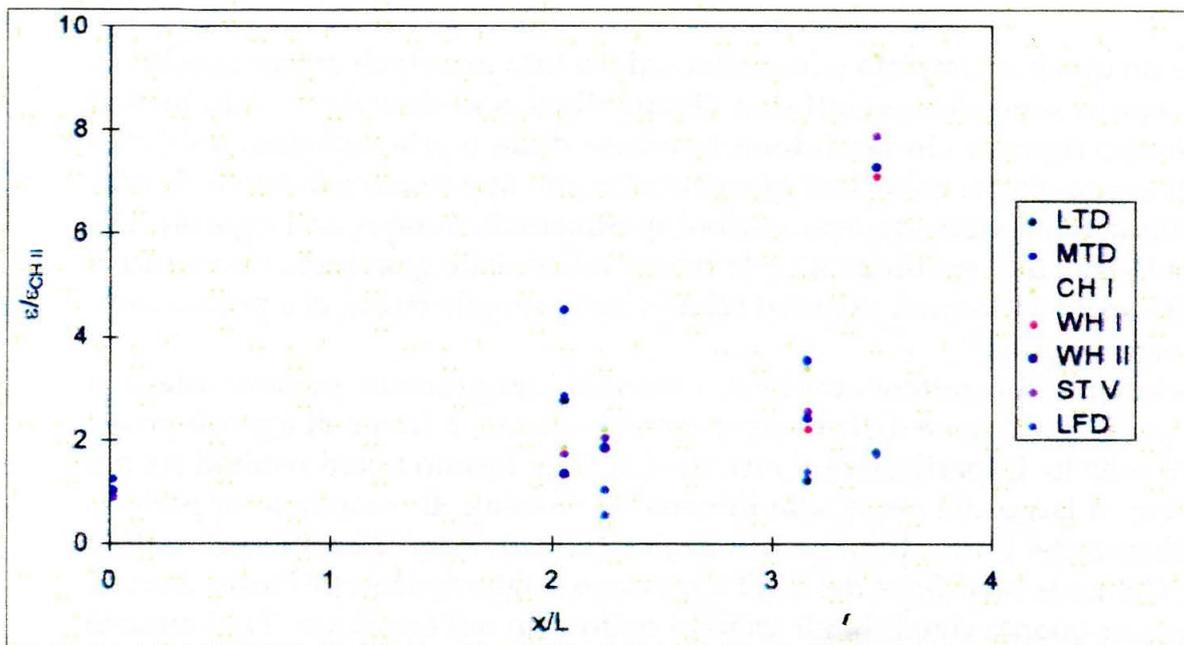


Fig. 27 - Variazione lungo il canale dell'errore medio delle u normalizzato con l'errore minimo

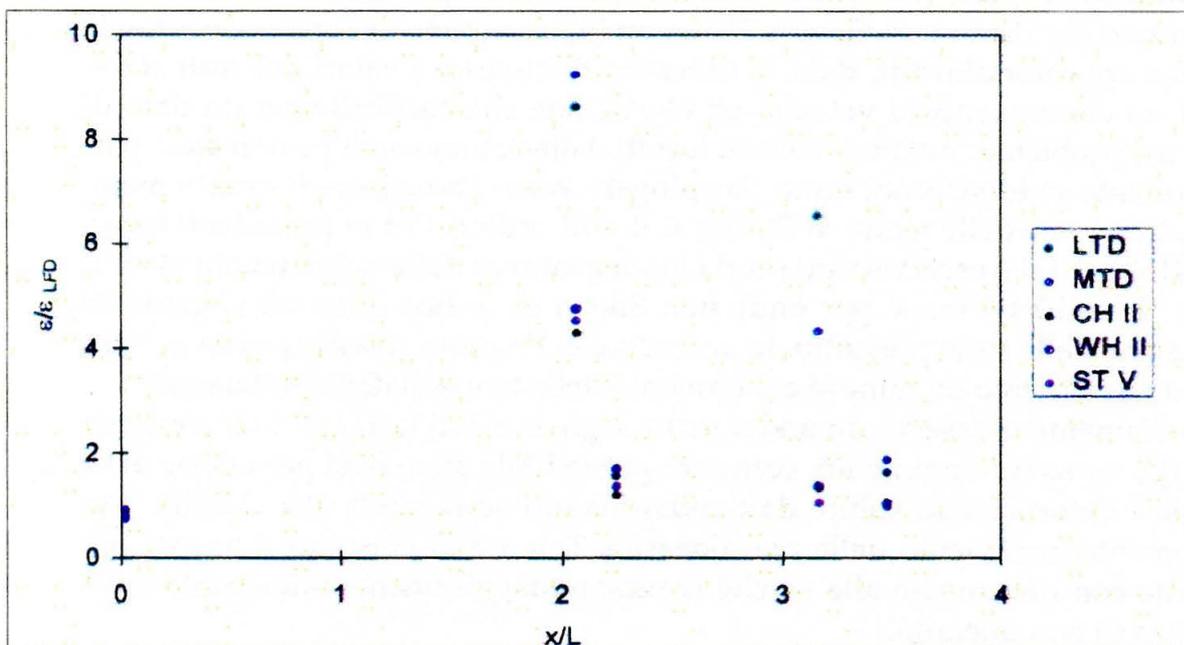


Fig. 28 - Variazione lungo il canale dell'errore medio delle w normalizzato con l'errore minimo

5. Conclusioni

Il presente lavoro ha analizzato diversi modelli di interpretazione del campo di moto di onde regolari, alla luce dei risultati derivati da misurazioni eseguite nel canale ondogeno bidimensionale del laboratorio del Dipartimento di Ingegneria delle Acque del Politecnico di Bari.

Si sono illustrate le relazioni che compaiono nei diversi metodi, in modo da

fornire un quadro completo e immediato delle loro principali caratteristiche. In particolare si sono riconosciuti due diversi filoni risolutivi: da un lato metodi matematici rigorosi che prendono le mosse dalle teorie stokiane, dall'altro metodi approssimati cosiddetti ingegneristici che apportano alla teoria di Airy semplificazioni dedotte da osservazioni sperimentali, dunque non rigorose. Dal confronto tra i dati sperimentali e le ricostruzioni delle grandezze cinematiche, eseguito anche in termini di errori relativi delle singole teorie, si è potuto evincere quanto segue.

Nonostante il carattere empirico, i modelli ingegneristici possono ritenersi validi per la predizione delle componenti di velocità, a fronte di agevoli procedure di calcolo. In particolare il metodo CH II ha fornito buoni risultati sia per le sezioni al largo che per quelle in zona di shoaling. È comunque opportuno sottolineare che l'introduzione di termini correttivi del II ordine nei metodi WH I, CH I e le modifiche del LTD apportano miglioramenti piuttosto limitati, almeno per quanto riguarda gli attacchi ondosi fin qui analizzati. Tra i modelli ingegneristici indagati, il LFD, nonostante la sua semplicità, risulta in grado di ricostruire con buona approssimazione il campo di moto anche in sezioni prossime al frangimento, laddove l'onda mostra un comportamento non lineare. Supportato dai risultati di Guza e Thornton [9], il metodo LFD richiede tuttavia ulteriori approfondimenti, data la necessità di chiarire i valori dei reali sfasamenti tra componenti di velocità ed elevazione che costituiscono un dato di input del problema. Anche i risultati forniti dalla soluzione di Fenton sono particolarmente soddisfacenti, tanto da spingere verso l'adozione di questo metodo piuttosto che delle teorie di Stokes al II e III ordine. Già in precedenti lavori ([1], [4]) infatti si è osservata una certa inadeguatezza delle ricostruzioni ottenute con le suddette teorie per onde non lineari di ordine inferiore al grado di espansione della serie prescelto. In accordo con l'Autore, avvicinandosi al frangimento, si è notato un minore adattamento della teoria ai dati sperimentali.

Mediamente si osserva un andamento degli errori di tutti i metodi crescente dal largo verso il frangimento, come era prevedibile attendersi per effetto delle maggiori deformazioni subite dall'onda quando aumenta la sua ripidità, con conseguente incremento delle non linearità. Tale trend crescente è ancora più evidente con riferimento alle w , che risultano maggiormente influenzate dalla presenza di non linearità.

Bibliografia

- [1] Damiani, L.; Mossa, M.; 1997 *Experimental Study on the Estimation Methods of Wave Orbital Velocity*, Proc. of the 7th International Offshore and Polar Engineering Conference, Honolulu, Hawaii, USA.
- [2] Damiani, L.; Mossa, M.; 1996 *Indagine sul campo di moto di un'onda regolare*, Scritti in Onore di Mario Ippolito, Ass. Idrotecnica Italiana Sez. Campania - Dip. di Ing. Idraulica e Ambientale Girolamo Ippolito, Napoli, Italy.
- [3] Damiani, L.; Mossa, M.; 1996 *Ricostruzione di un campo di moto ondoso regolare*, Accademia Pugliese delle Scienze, Bari, Italy.

- [4] De Serio, F.; 1997 *Experimental study on motion field generated by regular waves*, Internal report, Dipartimento di Ingegneria delle Acque, Politecnico di Bari.
- [5] Dean, R.G.; 1970 *Relative validities of water wave theories*, Jour. of Waterways and Harbours Division, Proc. of ASCE, Vol. 96, No. WW1.
- [6] Fenton, J.D.; 1985 *A fifth-order Stokes theory for steady waves* J. Waterway Port Coastal and Ocean Eng., ASCE, Vol. 111, No 2, pp 216-234.
- [7] Graw, K.U.; 1994 *Comparison of wave theories with velocity measurement* Proc. of Int. Symp. Waves-Physical and Numerical Modelling, University of British Columbia, Vancouver, pp 561-569.
- [8] Gudmestad, O.T.; Connor, J.J.; 1986 *Engineering approximation to nonlinear deepwater wave*, Applied Ocean Research, Vol. 8, No. 2.
- [9] Guza, R.T.; Thornton, E.B.; 1980 *Local and shoaled comparisons of sea surface elevations, pressures, and velocities* J. of Geophysical Research, Vol. 85, No C3.
- [10] Hattori, M.; 1986 *Experimental study on the validity range of various wave theories* Proc. of 20th Int. Conf. Coastal Engineering, ASCE, Vol. 1, pp 232-246.
- [11] Koyama, H.; Iwata, K.; 1986 *Estimation of particle velocities of shallow water waves by a modified transfer function method*, 20th Coastal Engineering Conference, Taipei, Taiwan, November 9-14.
- [12] Rebaudengo Landò, L.; Scarsi, G.; 1995 *Directional Random Wave Kinematics: Third Order Approximation* Proc. of 5th Int. Offshore and Polar Eng Conference, Vol III, pp 49-56.
- [13] Sawaragi, T.; 1995 *Coastal engineering-waves, beaches, wave-structure interactions*, Developments in Geotechnical Engineering, 78, Elsevier.
- [14] Skjelbreia, L.; Hendrickson, J.; 1960 *Fifth order gravity waves theory*, Proc. of the 7th ICCE, ASCE.
- [15] Vis, F.C.; 1980 *Orbital velocities in irregular waves*, Delft Hydraulic, no. 231.
- [16] Wheeler J.D.; 1970 *Method for calculating forces produced by irregular waves*, Journal of petroleum technology, marzo, pp.359-367.
- [17] Woltering, S.; Daemrich, K.F.; 1995 *Experimental validity of wave theories and application to horizontal orbital velocities*, International Conference on Coastal and Port Engineering in Developing Countries, Rio de Janeiro, Brazil.

APPENDICE

FENTON (ST V)

$$\begin{aligned} \eta(X,t) = & [\varepsilon \cos k(X-ct) + \varepsilon^2 B_{22} \cos 2k(X-ct) + \\ & + \varepsilon^3 B_{31} (\cos k(X-ct) - \cos 3k(X-ct)) + \\ & + \varepsilon^4 (B_{42} \cos 2k(X-ct) + B_{44} \cos 4k(X-ct)) + \\ & + \varepsilon^5 (-(B_{53} + B_{55}) \cos k(X-ct) + B_{53} \cos 3k(X-ct) + B_{55} \cos 5k(X-ct))] / k \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u(X,Z,t) = & (c-u') + C_0 \left(\frac{g}{k^3} \right)^{0.5} \cdot \sum_{i=1}^5 \varepsilon^i \sum_{j=1}^i jk \cdot A_{ij} \cosh jkZ \cos jk(X-ct) \\ w(X,Z,t) = & C_0 \left(\frac{g}{k^3} \right)^{0.5} \cdot \sum_{i=1}^5 \varepsilon^i \sum_{j=1}^i jk \cdot A_{ij} \sinh jkZ \sin jk(X-ct) \end{aligned}$$

essendo: $k = 2\pi/L$; $\varepsilon = kH/2$; $u' = (C_0 + \varepsilon^2 C_2 + \varepsilon^4 C_4) / (k/g)^{0.5}$

$$S = \operatorname{sech} 2kh; \quad s = \operatorname{senh} kh; \quad c = \operatorname{coth} kh; \quad r = \operatorname{tanh} kh$$

$$A_{11} = 1/s;$$

$$A_{22} = 3S^2 / (2(1-S)^2)$$

$$A_{31} = (-4 - 20S + 10S^2 - 13S^3) / (8s(1-S)^3)$$

$$A_{33} = (-2S^2 + 11S^3) / (8s(1-S)^3)$$

$$A_{42} = (12S - 14S^2 - 264S^3 - 45S^4 - 13S^5) / (24(1-S)^5)$$

$$A_{44} = (10S^3 - 174S^4 + 291S^5 + 278S^6) / (48(3+2S)(1-S)^5)$$

$$\begin{aligned} A_{51} = & (-1.184 + 32S + 13.232S^2 + 21.712S^3 + 20.940S^4 + 12.554S^5 - 500S^6 - 3.341S^7 - 670S^8) / \\ & / (64s(3+2S)(4+S)(1-S)^6) \end{aligned}$$

$$A_{53} = (4S + 105S^2 + 198S^3 - 1.376S^4 - 1.302S^5 - 117S^6 + 58S^7) / (32s(3+2S)(1-S)^6)$$

$$A_{55} = (-6S^3 + 272S^4 - 1.552S^5 + 852S^6 + 2.029S^7 + 430S^8) / (6s(3+2S)(4+S)(1-S)^6)$$

$$B_{22} = c(1 + 2S) / (2(1 - S))$$

$$B_{31} = -3(1 + 3S + 3S^2 + 2S^3) / (8(1 - S)^3)$$

$$B_{42} = c(6 - 26S - 182S^2 - 204S^3 - 25S^4 + 26S^5) / (6(3 + 2S)(1 - S))$$

$$B_{44} = c(24 + 92S + 122S^2 + 66S^3 + 67S^4 + 34S^5) / (24(3 + 2S)(1 - S)^4)$$

$$B_{53} = 9(132 + 17S - 2.216S^2 - 5.897S^3 - 6.292S^4 - 2.687S^5 + 194S^6 + 467S^7 + 82S^8) / (128(3 + 2S)(4 + S)(1 - S)^6)$$

$$B_{55} = 5(300 + 1.579S + 3.176S^2 + 2.949S^3 + 1.188S^4 + 675S^5 + 1.326S^6 + 827S^7 + 130S^8) / (384(3 + 2S)(4 + S)(1 - S)^6)$$

$$C_0 = r^{0.5}$$

$$C_2 = r^{0.5}(2 + 7S^2) / (4(1 - S)^2)$$

$$C_4 = r^{0.5}(4 + 32S - 116S^2 - 400S^3 - 71S^4 + 146S^5) / (32(1 - S)^5)$$

KOYAMA E IWATA

$$u(t) = H_u(h, T, z)\eta(t)$$

$$w(t) = H_w(h, T, z)\eta(t + \Delta t)$$

LTD

$$H_u(h, T, z) = \frac{2\pi \cosh kz}{T \sinh kh}$$

$$H_w(h, T, z) = \frac{2\pi \sinh kz}{T \sinh kh}$$

MTD

$$\begin{cases} H_u(h, T, z) = \frac{2\pi \cosh kz}{T \sinh kfh} & \eta > 0 \\ H_u(h, T, z) = \frac{2\pi \cosh kz}{T \sinh kh} & \eta < 0 \end{cases}$$

$$H_w(h, T, z) = \frac{2\pi g \sinh kz}{T \sinh kh}$$

$$f = 1 + \frac{\eta}{h} \left(1 - \frac{z}{h + \eta} \right)$$

essendo:

$$\begin{cases} g = 0.398 \left(\frac{\eta L_0}{h^2} \right)^{0.4} & 10 \leq \eta L_0 / h^2 \\ g = 1 & -1.3 \leq \eta L_0 / h^2 \leq 10 \\ g = 0.657 \left(\frac{|\eta L_0}{h^2} \right)^{1.6} & \eta L_0 / h^2 \leq -1.3 \end{cases}$$

WHEELER (WH I)

$$u(x, t) = \left(\frac{\pi H}{T} \right) \frac{\cosh k \left(\frac{z}{1 + \eta/h} \right)}{\sinh kh} \cos(kx - \omega t) \quad -h < z < \eta$$

CHAKRABARTI (CH I)

$$u(x, t) = \left(\frac{\pi H}{T} \right) \frac{\cosh k(z + h)}{\sinh k(\eta + h)} \cos(kx - \omega t) \quad -h < z < \eta$$

$$\eta(x,t) = \frac{H}{2} \cos(kx - \omega t) - \left(\frac{\pi H^2}{8} \right) \frac{1}{2 \operatorname{sen} kh \cosh kh} + \left(\frac{\pi H^2}{2L} \right) B' \cos 2(kx - \omega t)$$

$$u(x,t) = \left(\frac{\pi H}{T} \right) \frac{\cosh k \left(\frac{z}{1 + \eta/h} \right)}{\operatorname{senh} kh} \cos(kx - \omega t) + \left(\frac{\pi H}{T} \right) \left(\frac{\pi H}{L} \right) \left(\frac{z}{h} \right) \frac{\operatorname{senh} k \left(\frac{z}{1 + \eta/h} \right)}{\operatorname{senh} kh} \cdot \operatorname{sen}^2(kx - \omega t) + 2 \left(\frac{\pi H}{T} \right) \left(\frac{\pi H}{L} \right) [D' \cosh 2kz + D'' \cosh 4kz] \cos 2(kx - \omega t)$$

$$w(x,t) = \left(\frac{\pi H}{T} \right) \frac{\operatorname{senh} k \left(\frac{z}{1 + \eta/h} \right)}{\operatorname{senh} kh} \operatorname{sen}(kx - \omega t) - \left(\frac{\pi H}{T} \right) \left(\frac{H}{4h} \right) \frac{\operatorname{senh} k \left(\frac{z}{1 + \eta/h} \right)}{\operatorname{senh} kh} \cdot \operatorname{sen} 2(kx - \omega t) + \left(\frac{\pi H}{T} \right) \left(\frac{\pi H}{L} \right) [2D' \operatorname{senh} 2kz + 4D'' \cosh 4kz] \operatorname{sen} 2(kx - \omega t)$$

essendo:

$$Sh = \operatorname{senh} kh; \quad Ch = \cosh kh$$

$$D' = \frac{6Sh^4 - Sh^2 - 3}{8Sh^4(2Sh^2 + 1)} + \frac{-5Sh^5 + 4Sh^4 - 25/6 Sh^3 + 6Sh^2 + 2}{4Sh^4 Ch(2Sh^2 + 1)} \cdot \frac{1}{kh}$$

$$D'' = \frac{-1}{8Sh^2(2Sh^2 + 1)} + \frac{5}{24Sh Ch(2Sh^2 + 1)} \cdot \frac{1}{kh}$$

$$B' = -\frac{(4Sh^2 + 3)Ch}{4Sh^3(2Sh^2 + 1)} + \frac{2Sh^5 + 12Sh^4 - 4Sh^3 + 18Sh^2 + 6}{6Sh^3(2Sh^2 + 1)} \cdot \frac{1}{kh}$$

$$\eta(x,t) = \frac{H}{2} \cos(kx - \omega t) + \frac{1}{2} \left(\frac{\pi H^2}{2L} \right) \frac{1}{2Sh Ch} + \left(\frac{\pi H^2}{2L} \right) B' \cos 2(kx - \omega t)$$

$$u(x,t) = \left(\frac{\pi H}{T} \right) \frac{\cosh k(z+h)}{Sh} \cos(kx - \omega t) + \left(\frac{\pi H}{T} \right) \left(\frac{\pi H}{L} \right) \frac{Ch}{Sh^2} \cosh k(z+h) \operatorname{sen}^2(kx - \omega t) + 2 \left(\frac{\pi H}{T} \right) \left(\frac{\pi H}{L} \right) [D' \cosh 2k(z+h) + D'' \cosh 4k(z+h)] \cos 2(kx - \omega t)$$

$$w(x,t) = \left(\frac{\pi H}{T} \right) \frac{\operatorname{senh} k(z+h)}{Sh} \operatorname{sen}(kx - \omega t) + \left(\frac{\pi H}{T} \right) \left(\frac{\pi H}{L} \right) [2D' \operatorname{senh} 2k(z+h) + 4D'' \operatorname{senh} 4k(z+h)] \operatorname{sen} 2(kx - \omega t)$$

essendo:

$$Sh = \operatorname{senh} k \left(\frac{H}{2} \cos(kx - \omega t) + h \right); \quad Ch = \cosh k \left(\frac{H}{2} \cos(kx - \omega t) + h \right)$$

$$D' = \frac{6Sh^4 + 7Sh^2 + 1}{8Sh^4(2Sh^2 + 1)}$$

$$D'' = \frac{-1}{8Sh^2(2Sh^2 + 1)}$$

$$B' = \frac{(4Sh^4 + 5Sh^2 + 1)}{4ChSh^3(2Sh^2 + 1)}$$

LFD

Per ogni componente degli spettri di ampiezza delle u e delle w , si ha:

$$A_u = F_u(h, T, z)A_\eta$$

$$A_w = F_w(h, T, z)A_\eta$$

essendo:

$$F_u(h, T, z) = \frac{2\pi \cosh kz}{T \sinh kh}$$

$$F_w(h, T, z) = \frac{2\pi \sinh kz}{T \sinh kh}$$