



POLITECNICO DI BARI

FACOLTA' DI INGEGNERIA

ISTITUTO DI IDRAULICA E COSTRUZIONI IDRAULICHE

TESI DI LAUREA

**DIAGRAMMI DI VELOCITA' E RESISTENZE AL MOTO
IN CONDOTTI CON SEZIONE NON CIRCOLARE**

Relatore:
Chiar.mo Prof. Ing. ANTONIO PETRILLO

Laureando:

MICHELE MOSSA

ANNO ACCADEMICO 1990/91

Indice generale

1	Introduzione	4
1.1	Classificazione dei Fluidi	5
1.2	Cinematica e dinamica dei fluidi	8
1.2.1	Regimi di movimento	8
1.2.2	Tipi di movimento	8
1.2.3	Equazione di continuità	9
1.2.4	Equazioni fondamentali della dinamica dei fluidi	10
1.2.4.1	Equazione indefinita del moto	11
1.2.4.2	Equazione globale dell'equilibrio dinamico	13
1.2.4.3	Equazione del moto per i fluidi Newtoniani	14
1.2.4.3.1	Tensore delle velocità di rotazione rigida e tensore delle velocità di deformazione	15
1.2.4.3.2	Tensore degli sforzi nei fluidi viscosi	18
1.2.4.3.3	Equazioni meccaniche dei fluidi newtoniani	20
1.2.5	Azione di trascinamento di una corrente	21
1.3	Moto uniforme di correnti in pressione	24
1.4	Condizioni al contorno	24
2	Analisi del moto laminare in condotte cilindriche con sezioni di vario tipo	27
2.1	Moto in condotto a sezione circolare	29
2.2	Moto fra facce piane parallele	32
2.3	Moto in condotti a sezione anulare	35
2.4	Moto in condotto a sezione ellittica	37
2.5	Moto in condotto a sezione triangolare equilatera	39
2.6	Moto in condotto a sezione rettangolare	41
2.7	Metodo delle differenze finite	44
2.8	Considerazioni sulle sezioni diverse da quelle trattate	50
2.9	Indice di resistenza	54
2.10	Principio variazionale del Ghetti	56
3	Turbolenza	58
3.1	Grandezze cinematiche caratteristiche di un moto turbolento	61
3.2	Moto medio	63
3.3	Equazioni meccaniche del moto medio	64
3.4	Concetto di strato limite e condizioni di ingresso in condotta	66
3.5	Caso di condotto a sezione circolare	68
3.6	Diagrammi di velocità nel moto turbolento. Possibili vie di studio	70
3.7	Viscosità turbolenta e lunghezza di mescolamento	72
3.8	Concetto e calcolo di scala di turbolenza	75
3.9	Spessore dello spostamento e spessore della quantità di moto	77
3.10	Strati limiti in equilibrio	78
3.11	Natura composta dello strato limite turbolento	79
3.12	Distribuzioni di velocità medie in fluidi incompressibili su superfici lisce	83
3.12.1	Substrato viscoso	83
3.12.2	Zona completamente turbolenta della inner region	84
3.12.3	Zona di transizione (buffer layer) della inner region	86
3.12.4	Outer region	88
3.13	Espressione del profilo di velocità secondo Coles	89
3.14	Distribuzioni di velocità medie in flussi turbolenti incompressibili su superfici scabre	93

3.15	Contributo di E. Marchi alla determinazione delle leggi di distribuzione della velocità...	96
3.16	Teoria del mesolayer	100
3.17	Diagrammi di intensità di turbolenza e proposta di una legge universale	102
4	Leggi di velocità e resistenza nei condotti	106
4.1	Leggi di resistenza per condotti circolari	106
4.2	Reimpostazione teorica delle leggi di velocità per condotti di sezione non circolare	108
4.3	Reimpostazione teorica delle leggi di resistenza nei condotti di sezione non circolare ..	111
4.4	Caso di condotto a sezione trasversale anulare concentrica.	114
4.5	Leggi di resistenza per condotti a sezione retta anulare concentrica	119
5	Esperienze di laboratorio	124
5.1	Descrizione dell'apparato sperimentale	124
5.2	Indagini effettuate	126
5.2.1	Posizione della velocità massima.....	126
5.2.2	Dati e diagrammi di velocità.....	128
5.2.3	Considerazioni generali.....	143
5.3	Applicazione della legge di resistenza di Macagno-McDougall	145
5.4	Analisi di una differente procedura per il calcolo delle resistenze nei condotti anulari lisci.	146
6	Conclusioni	150
Appendici		154
Appendice A		154
Appendice B.....		156
Appendice C.....		159
Bibliografia		164
Indice analitico.....		168

1 INTRODUZIONE

E' nota l'importanza pratica delle leggi di esistenza al moto dei fluidi nei condotti. Ogni progettazione o verifica di un condotto fa riferimento alle leggi di resistenza.

Mentre sono assai numerose le ricerche compiute per la determinazione delle distribuzioni di velocità, degli sforzi di scorrimento e, quindi, delle perdite di energia per i condotti a sezione circolare, minori sono le informazioni per i condotti con sezione circolare. Appare interessante, pertanto, effettuare un'indagine estesa alle correnti fluide in moto uniforme laminare e turbolento per condotti di sezione non circolare.

Nel moto laminare, applicando, per analogia, metodi della teoria dell'elasticità o mediante il metodo delle differenze finite, viene mostrata la possibilità della determinazione dei diagrammi di velocità e, quindi, delle leggi di resistenze al moto, per condotte di ogni forma. In effetti, nel moto laminare, il problema della determinazione dei diagrammi di velocità è di natura analitica, essendo data in forma differenziale la distribuzione di velocità, attraverso l'equazione di Poisson. L'indagine nel campo del moto laminare, pur avendo un minore interesse nel campo applicativo, è importante per il confronto che consente con il campo turbolento.

Nel moto turbolento, di ben maggior importanza applicativa, constatata la pratica impossibilità di pervenire alla determinazione dei diagrammi di velocità, e, dunque, delle leggi di resistenza, attraverso la sola indagine teorica, è necessario sviluppare, accanto a questa, un'indagine su basi sperimentali.

In particolare, nell'ambito dei condotti anulari, vi sono molte ricerche indirizzate alla determinazione delle leggi di resistenza per pareti lisce e scabre, ma pochi sono i rilievi sui diagrammi di velocità, che, come è noto, sono alla base della determinazione delle resistenze al moto.

Alla luce di quanto detto, il lavoro della tesi, è indirizzato ad un'analisi dello stato delle indagini sul moto laminare e turbolento, dei rilievi di velocità e al calcolo delle leggi di resistenza per condotti anulari di tipo liscio.

1.1 Classificazione dei Fluidi

Per deformare un corpo occorre esercitare degli sforzi distribuiti sulla sua superficie libera. Può accadere che tali sforzi dipendano solo dal valore della deformazione complessivamente ottenuta: si dice allora che il corpo manifesta comportamento da materiale elastico. Può avvenire invece che l'entità degli sforzi richiesti dipenda unicamente dalla velocità con la quale si realizza la deformazione: in tal caso si dice che il materiale in esame si comporta come fluido tout court. Esistono anche comportamenti intermedi, con dipendenza degli sforzi sia dall'entità della deformazione impressa, sia dalla rapidità con la quale questa è raggiunta, che vengono classificati come comportamenti da materiale viscoelastico (si faccia riferimento alla tabella (1)).

FLUIDI MONOFASE			
Puramente viscosi	Newtoniani		$\tau = \mu \dot{\gamma}$
	Indipendenti dal tempo	pseudoplastici	$\tau = k \dot{\gamma}^n \ (n < 1)$ (legge di potenza)
		dilatanti	$\tau = k \dot{\gamma}^n \ (n > 1)$ (legge di potenza)
		alla Bingham	$\tau - \tau_c = \mu_p \dot{\gamma}$
	Dipendenti dal tempo	tixotropici	$\tau = f_1(\lambda, \dot{\gamma}) \dot{\gamma}$ $\frac{\partial \lambda}{\partial t} = f_2(\lambda, \dot{\gamma})$ (in generale)
		reopettici	vari modelli matematici
Viscoelastici	Vari tipi		$F(\tau, \dot{\tau}, \ddot{\tau}, \dots; \gamma, \dot{\gamma}, \ddot{\gamma}, \dots)$ Esistono vari modelli matematici (Maxwell, Kelvin-Voigt,...)

Tab. 1. Classificazione dei fluidi. Per completezza di discorso, sia pur schematico, si ricorda l'esistenza dei fluidi bifasici (gas-liquido, liquido-liquido, gas-solido, liquido-solido). (da G. Corso [11]).

Si supponga di avere un fluido assoggettato ad una certa deformazione: su ciascuna porzione del contorno del corpo in esame, unitaria e sufficientemente piccola da poter essere confusa con il piano tangente per un suo punto, la risultante delle forze applicate ammette, in genere, una componente normale (σ) ed una componente tangenziale (τ). Lo studio della componente tangenziale riesce particolarmente comodo quando la deformazione è dovuta ad un semplice scorrimento. Si consideri perciò un corpo fluido delimitato da due superfici piane e parallele. Per mantenere una di queste superfici limite in moto con velocità v_d rispetto all'altra, senza modificare la loro distanza reciproca d , è necessario esercitare sulle superfici stesse delle forze tangenziali uniformemente distribuite. Eccetto che per i fluidi tixotropici e reopettici, gli sforzi τ non sono funzione del tempo e si usa esprimere la loro dipendenza dalla velocità di scorrimento con lo sviluppo in serie:

$$\tau = \tau_1 + \mu \left(\frac{v_d}{d} \right) + \mu_1 \left(\frac{v_d}{d} \right)^2 + \dots \quad (1)$$

ed introdurre nomenclature particolari a seconda dell'importanza relativa assunta dai singoli termini dello sviluppo stesso. In particolare, si dice che un fluido presenta comportamento *newtoniano* quando tutti i termini, del secondo membro dell'equazione (1), risultano irrilevanti rispetto al secondo. Al fattore μ si riserva il nome di coefficiente di viscosità dinamica. Si nota che μ , nelle espressioni analitiche riguardanti il moto dei fluidi, compare spesso rapportato alla densità ρ . Ciò ha suggerito l'opportunità di introdurre il coefficiente di viscosità dinamica $\nu = \mu/\rho$.

Sforzi legato alla deformazione o alla velocità della deformazione si presentano anche quando non è richiesto uno scorrimento, ma solo una variazione di volume. Se non riscontrano effetti di ricordo delle configurazioni pregresse, è spesso sufficiente considerare aumenti di pressione Δp rispetto alle pressioni richieste dalla classica equazione di stato, direttamente proporzionali alla velocità di variazione del volume W . Il coefficiente di proporzionalità differisce da quello μ , relativo allo scorrimento. Si usa porre

$$\Delta p = - \left(\mu' + \frac{2}{3} \mu \right) \frac{1}{W} \frac{dW}{dt}$$

e chiamare μ' secondo coefficiente di viscosità dinamica. Di fatto per talune pratiche applicazioni si fa riferimento al cosiddetto fluido perfetto, caratterizzato dal valore di viscosità $\mu=0$ e da tensioni tangenziali $\tau=0$.

Nella tabella 1 sono riportate le classiche leggi che legano le tensioni tangenziali alla velocità di deformazione angolare. In particolare si riporta la classica legge dei fluidi Newtoniani, la legge di potenza per i fluidi pseudoplastici e dilatanti, la legge lineare con la viscosità plastica per i fluidi alla Bingham. Si accenna ad una legge per i fluidi tixotropici, in cui il termine di proporzionalità tra la tensione tangenziale e la velocità di deformazione angolare è una funzione della velocità di deformazione stessa e di un termine λ , la cui derivata rispetto al tempo è ancora funzione di λ e

della velocità di deformazione angolare. Notevoli e complessi sono, infine, i modelli matematici proposti per i fluidi reopectici e viscoelastici.

Nel seguito si farà riferimento a fluidi Newtoniani, assumendo l'ipotesi semplificativa di incomprimibilità, salvo specifica menzione.

1.2 Cinematica e dinamica dei fluidi

1.2.1 Regimi di movimento

Si riconoscono i seguenti regimi:

Regime laminare (o viscoso, o per filetti, o regolare o, ancora, alla Poiseulle). In questo caso le traiettorie effettive delle singole particelle fluide coincidono con le traiettorie del moto medio, che, se uniforme, sono parallele alle rette generatrici del condotto.

Regime turbolento (detto talvolta anche “idraulico”). In questo regime sono presenti, in seno alla massa fluida, irregolari fluttuazioni di velocità delle singole particelle, alle quali corrisponde un continuo scambio di massa e di quantità di moto da zona a zona del campo di moto, nel quale possiamo immaginare sovrapposti due movimenti: l'uno cosiddetto di *trasporto*, che determina lo spostamento d'insieme della fluida; l'altro, che viene chiamato di *agitazione*, che comporta una irregolare oscillazione dei caratteri del moto intorno ai valori medi di *trasporto*. Anche per i moti turbolenti si parlerà di moto permanente o uniforme quando tale è il movimento di trasporto.

1.2.2 Tipi di movimento

Si riconoscono seguenti tipi:

- Moto permanente. Il vettore velocità è funzione delle coordinate x, y, z di un prefissato sistema di riferimento e non dipende dal tempo.
- Moto uniforme. In senso stretto è quello in cui il vettore velocità è indipendente oltre che dal tempo anche da x, y e z . In meccanica dei fluidi, con tale denominazione, si usa designare un

campo più vasto di processi di movimento e, precisamente, tutti quelli nei quali le caratteristiche del moto si mantengono identiche nel tempo e nei successivi punti di ogni traiettoria pur potendo essere differenti da traiettoria a traiettoria. Perchè ciò avvenga, è necessario, a rigore, che le traiettorie siano rettilinee.

- Moto permanente o uniforme in media. Per le condizioni di regime turbolento si parla di moti permanenti o uniformi in media (anche se talvolta si omette in media). In tal caso *permanente* o *uniforme* sono riferiti al moto base di trasporto, al quale unicamente si deve lo spostamento d'insieme della massa fluida; il moto di agitazione determina, infatti, un semplice movimento irregolare delle particelle fluide che non contribuisce al loro spostamento.
- Moto vario (o non permanente). Il vettore velocità è funzione di x, y, z e del tempo t.
- Moto gradualmente vario. E' il moto di una corrente a pelo libero con variazioni gradualali di sezione ed eventuale di direzione. In ogni sezione si può assumere pressione ad andamento idrostatico.

1.2.3 Equazione di continuità

Si richiamano, brevemente, le varie forme dell'equazione di continuità, che, come è noto, si basa sul fondamentale principio di conservazione della massa:

1) equazione indefinita

1.a) per fluido comprimibile:

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div}(\vec{V}) = 0$$

1.b) per fluido incompressibile:

$$\operatorname{div}(\vec{V}) = 0$$

2) equazione globale

2.a) per fluido comprimibile:

$$\int_A \rho v_n dA = \int_W \frac{\partial \rho}{\partial t} dW$$

2.b) per fluido incompressibile:

$$Q_{entrante} = Q_{uscente}$$

3) equazione di continuità applicata alle correnti. Si ricorda che per corrente si intende una vasta categoria di moti caratterizzati dal fatto che tutte le traiettorie hanno sensibilmente la stessa direzione; tali sono la maggioranza dei moti in tubazioni, canali aperti, corsi d'acqua naturali, ecc.

3.a) fluido comprimibile in cui la sezione A dipende dal tempo:

$$\frac{\partial(\rho Q)}{\partial s} + \frac{\partial(\rho A)}{\partial t} = 0$$

3.b) fluido incompressibile con sezione A dipendente dal tempo:

$$\frac{\partial Q}{\partial s} + \frac{\partial A}{\partial t} = 0$$

3.c) se, inoltre, il moto è permanente:

$$\frac{dQ}{ds} = 0$$

3.d) moto vario di fluido incompressibile con $\frac{\partial A}{\partial t} = 0$:

$$\frac{\partial Q}{\partial s} = 0$$

1.2.4 Equazioni fondamentali della dinamica dei fluidi

Si richiamano, brevemente, le equazioni fondamentali della Dinamica dei Fluidi.

1.2.4.1 Equazione indefinita del moto

Si definiscano con τ_{ij} le componenti degli sforzi τ applicati sulle superfici di una porzione infinitesima di fluido. Partendo dalla prima equazione cardinale della dinamica:

$$d\vec{R} = \vec{A} dm$$

si ottiene la fondamentale equazione indefinita del moto:

$$\rho (\vec{F} - \vec{A}) = \frac{\partial \tau_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_z}{\partial z} \quad (2)$$

Associando alla (2) la seconda equazione cardinale della dinamica (equazione dei momenti), che si identifica nelle relazioni:

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}; \tau_{xz} = \tau_{zx}; \tau_{yz} = \tau_{zy}$$

ossia nella condizione di simmetria della matrice associata al tensore di tensione ($\tau_{ij} = \tau_{ji}$), si ottengono le seguenti equazioni scalari:

$$\rho (F_x - \frac{du}{dt}) = \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z}$$

$$\rho (F_y - \frac{dv}{dt}) = \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z}$$

$$\rho (F_z - \frac{dw}{dt}) = \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z}.$$

con ovvio significato dei simboli.

Per la soluzione del problema dell'equilibrio dinamico, dunque, si hanno a disposizione:

- 1) 3 equazioni scalari del moto;
- 2) 1 equazione di continuità;
- 3) 1 equazione di stato che individua il legame fra la densità, lo stato tensionale del fluido e la sua temperatura. Per i processi isotermici, la temperatura non comparirà come variabile. Se,

poi, il fluido è assunto incompressibile quest'ultima equazione si riduce alla condizione $p =$ costante.

Pertanto il numero complessivo di equazioni a disposizione è cinque. Le incognite del problema sono:

- 1) cinematiche: u, v, w ;
- 2) tensionali: $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}=\tau_{yx}, \tau_{xz}=\tau_{zx}, \tau_{yz}=\tau_{zy}$
- 3) di stato: p .

Un semplice bilancio tra incognite ed equazioni mette in evidenza che è necessario scrivere altre cinque equazioni nelle stesse variabili: esse vengono stabilite in base alle modalità di deformazione del fluido, le quali dipendono dalle cosiddette proprietà reologiche del fluido stesso, individuabili in generale per via sperimentale.

Un caso di risoluzione particolarmente semplice si ha per il cosiddetto *fluido perfetto*. Tale entità astratta, per definizione, è caratterizzata da uno stato di sforzo identico a quello dei fluidi in quiete: componenti tangenziali degli sforzi ovunque nulle ($\tau_{xy}=\tau_{xz}=\tau_{yz}=0$) e componenti normali uguali fra loro ($\sigma_x=\sigma_y=\sigma_z=p$). Per le componenti tensionali σ , le uniche diverse da zero, si adotta come per i fluidi in quiete, la denominazione di *pressione* p . Pertanto per i fluidi perfetti l'equazione indefinita del moto, nota più propriamente come equazione di Eulero, è:

$$\rho (\vec{F}-\vec{A}) = \text{grad}(p) \quad (3)$$

che, accoppiata all'equazione di continuità e a quella di stato, consente di risolvere il problema idrodinamico.

Poiché, infine, il sistema di equazioni che regge il movimento è di tipo differenziale, è evidente che, per la soluzione del problema idrodinamico, occorre assegnare anche le condizioni al contorno e, se il moto è vario, quelle iniziali; esse però sono in genere di facile individuazione: ad esempio, velocità costantemente nulla a contatto con le pareti, pressioni costanti sulle superfici libere, ecc...

1.2.4.2 Equazione globale dell'equilibrio dinamico.

La precedente equazione indefinita del movimento, insieme con l'equazione di continuità, con quella di stato, con le relazioni fra gli sforzi e le deformazioni e con le condizioni al contorno ed iniziali proprie dello specifico processo di moto in esame, consente di giungere alla determinazione degli elementi caratteristici del moto in ogni punto del campo, fornendone un quadro completo e dettagliato. Questo risultato, che evidentemente rappresenta la più completa soluzione del problema dinamico, può essere però raggiunto solo in pochissimi casi. D'altra parte, va osservato che la conoscenza dettagliata delle velocità e delle componenti degli sforzi in tutti i punti del campo di moto è in genere superflua nella risoluzione di numerosi problemi pratici, che richiedono solo una descrizione d'insieme del moto. Risulta allora più conveniente ricorrere ad una trattazione non locale del processo di moto, bensì globale che porta alla seguente relazione:

$$\int_W \rho \vec{F} dW - \int_W \rho \vec{A} dW = \int_W \left(\frac{\partial \vec{\tau}_x}{\partial x} + \frac{\partial \vec{\tau}_y}{\partial y} + \frac{\partial \vec{\tau}_z}{\partial z} \right) dW \quad (4)$$

avendo definito con W un volume finito del fluido delimitato dalla superficie chiusa di contorno A fissa nello spazio.

Dopo una serie di passaggi matematici, dalla (4) si ottiene la seguente forma dell'equazione globale dell'equilibrio dinamico:

$$\int_W \rho \vec{F} dW + \int_A \vec{\tau}_n dA + \int_A \rho v_n \vec{v} dA - \int_W \frac{\partial (\rho \vec{v})}{\partial t} dW = 0 \quad (5)$$

avendo indicato con v_n la componente di velocità lungo la normale alla superficie A.

Si analizzano, ora, i singoli termini dell'equazione (5):

$$\vec{G} = \int_W \rho \vec{F} dW$$

rappresenta la risultante delle forze di massa agenti sulle singole particelle che occupano il volume W considerato;

$$\Pi = \int_A \vec{\tau}_n dA$$

è la risultante degli sforzi che vengono esercitati sul fluido attraverso la superficie di contorno. Si tratta, cioè, della *spinta* che la superficie di contorno trasmette;

$$\vec{M} = \int_A \rho v_n \vec{v} dA$$

si osserva che v_n è pari alla portata infinitesima dQ che passa attraverso l'area dA ; il prodotto $\rho v_n dA = \rho dQ$ fornisce, quindi, la massa che transita nell'unità di tempo attraverso dA ; $\rho v dQ$ rappresenta la quantità di moto posseduta da detta massa: si tratta di un vettore diretto in ogni punto come la velocità. Pertanto M è la quantità di moto di tutta la massa fluida che attraversa nell'unità di tempo la superficie di contorno A del volume W . Nell'intera superficie A si possono distinguere tre porzioni: una A_1 che è attraversata da fluido che entra in W , una A_2 attraversata da fluido che esce ed una terza, A_0 , non attraversata da fluido: si potrà dunque porre $M = M_1 - M_2$. Si tenga presente che M , M_1 , M_2 , che di norma si designano come quantità di moto nell'unità di tempo, ossia *flussi di quantità di moto*.

Adottando i simboli ora introdotti, l'equazione globale dell'equilibrio dinamico può essere scritta:

$$\vec{G} + \vec{\Pi} + \vec{M}_1 - \vec{M}_2 + \vec{I} = 0 \quad (6)$$

Si tratta di una relazione vettoriale fra quantità che hanno le dimensioni di una forza. Solo $\vec{G}$ ed $\vec{I}$ dipendono dai valori che le grandezze in gioco assumono nei punti interni del volume W , mentre $\vec{\Pi}$, $\vec{M}_1$ ed $\vec{M}_2$ dipendono unicamente dalle condizioni che si verificano alla superficie di contorno. L'equazione (6), dato il modo in cui è stata ricavata, non presenta limitazioni al suo impiego; in particolare essa vale per fluidi sia comprimibili che incompressibili, moto laminare o turbolento. Per ulteriori informazioni si può fare riferimento al testo di Citrini-Noseda (8).

1.2.4.3 Equazione del moto per i fluidi Newtoniani.

L'ideale schema di fluido perfetto, definito nel paragrafo 1.2.4.1, non è evidentemente in grado di risolvere una lunga serie di problematiche in cui gli sforzi tangenziali, ancorché essere diversi da

zero, sono tutt'altro trascurabili. Ci si propone, pertanto di richiamare le equazioni del moto per un fluido reale, esplicitando le componenti degli sforzi in funzione delle sue proprietà fisiche; come già detto, questo esame viene limitato al caso dei fluidi newtoniani, caratterizzati da un valore di viscosità indipendente dagli sforzi e quindi dal moto.

1.2.4.3.1 Tensore delle velocità di rotazione rigida e tensore delle velocità di deformazione.

Un primo esame degli aspetti del moto che si svolge con la velocità $v(x,t)$ può essere condotto considerando l'assetto locale di queste velocità. Concentrata l'attenzione, per il momento, sulle sole variazioni spaziali, si mettono in evidenza le deformazioni subite dalla massa fluida nel suo moto, o meglio, le velocità con le quali queste deformazioni hanno luogo.

Se all'istante t_0 la velocità è definita dall'entità vettoriale $v(x,t_0)$, il tasso di variazione della v nella direzione individuata dal versore n nel punto x_0 è espresso dalla

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial n} = n_x \frac{\partial \vec{v}}{\partial x} + n_y \frac{\partial \vec{v}}{\partial y} + n_z \frac{\partial \vec{v}}{\partial z}$$

avendo posto

$$n_x = \frac{\partial x}{\partial n}, n_y = \frac{\partial y}{\partial n}, n_z = \frac{\partial z}{\partial n}.$$

Si vede, così, che i tre vettori

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial x}, \frac{\partial \vec{v}}{\partial y}, \frac{\partial \vec{v}}{\partial z}$$

costituiscono le componenti vettoriali di un tensore del secondo ordine. Esso è detto *tensore dei gradienti di velocità*, ed è indicato di norma come **grad v**. Le sue componenti scalari $(\text{grad } v)_{ik}$, che vengono messe in evidenza scrivendo esplicitamente le tre componenti scalari di ciascuna componente vettoriale, possono essere riunite nella seguente matrice:

$$\text{grad}(\vec{v}) \equiv \begin{bmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{\partial v_y}{\partial x} & \frac{\partial v_z}{\partial x} \\ \frac{\partial v_x}{\partial y} & \frac{\partial v_y}{\partial y} & \frac{\partial v_z}{\partial y} \\ \frac{\partial v_x}{\partial z} & \frac{\partial v_y}{\partial z} & \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{bmatrix}.$$

Con l'introduzione del tensore dei gradienti di velocità, i differenziali spaziali delle velocità possono essere compattati nella scrittura:

$$d\vec{v} = d\vec{x} \cdot \text{grad}(\vec{v}).$$

Nell'intorno di x_0 ed all'istante t_0 , la velocità del fluido è data quindi sostanzialmente dall'espressione:

$$\vec{v}(\vec{x}) = \vec{v}(\vec{x}_0) + d\vec{x} \cdot [\text{grad}(\vec{v})]_{x_0}.$$

Si può scindere $\text{grad } v$ nella sua parte emisimmetrica Ω e nella sua parte simmetrica D , rappresentate dalle matrici:

$$\Omega \equiv \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_z}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) & 0 & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_y}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial y} \right) & 0 \end{bmatrix}$$

$$D \equiv \begin{bmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) & \frac{\partial v_y}{\partial y} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \right) & \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{bmatrix}$$

Secondo questa decomposizione, si può scrivere pure:

$$\vec{v}(\vec{x}) = \vec{v}(\vec{x}_0) + d\vec{x} \cdot \Omega(\vec{x}_0) + d\vec{x} \cdot D(\vec{x}_0) .$$

La velocità del fluido nell'intorno di x_0 appare così suddivisa in tre componenti. La prima, $\mathbf{v}(x_0)$, è indipendente dal punto x , ed è quindi dovuta ad una traslazione rigida d'insieme: $\mathbf{v}(x_0)$ svolge perciò il ruolo di *vettore delle velocità di traslazione rigida*. La seconda componente, $dx \cdot \Omega$ ha la struttura:

$$d\vec{x} \cdot \Omega = \frac{1}{2} \det \begin{bmatrix} \vec{i}_x & \vec{i}_y & \vec{i}_z \\ \frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} & \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} & \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \\ dx & dy & dz \end{bmatrix} .$$

I termini che figurano nella seconda riga di questo determinante sono le componenti del vettore:

$$\begin{aligned} \text{rot}(\vec{v}) &= \det \begin{bmatrix} \vec{i}_x & \vec{i}_y & \vec{i}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_x & v_y & v_z \end{bmatrix} = \\ &= \vec{i}_x \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) + \vec{i}_y \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) + \vec{i}_z \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \end{aligned}$$

e si può scrivere:

$$d\vec{x} \cdot \Omega = \frac{1}{2} (\text{rot} \vec{v}) \wedge d\vec{x} .$$

Ne segue che la quantità $dx \cdot \Omega$ è connessa ad una rotazione rigida con velocità angolare:

$$\vec{\omega} = \frac{1}{2} \text{rot} \vec{v} :$$

il tensore relativo, Ω , viene detto *tensore delle velocità di rotazione rigida*.

La parte residua, $dx \cdot D$, può essere studiata osservando che valgono le seguenti identità:

$$d\vec{x} \cdot D = \text{grad} \left(\frac{1}{2} d\vec{x} \cdot D \cdot d\vec{x} \right) = \text{grad} \left(\frac{1}{2} \sum_{i,k=1,2,3} dx_i dx_k D_{ik} \right) .$$

perchè D è un tensore simmetrico.

Le superfici sulle quali l'argomento del gradiente mantiene un valore uniforme sono quadriche con centro x_0 , e sono tutte simili tra loro, perchè le D_{ik} sono calcolate in x_0 . A seconda dei valori assunti dalle D_{ik} , queste quadriche possono essere ellissoidi, iperboloidi o loro forme degeneri. In ciascun punto x si osserva una velocità $dx \cdot D$ normale alla particolare quadrica che passa per x : nel caso che le quadriche siano ellissoidi possono aversi moti associati a dilatazioni, oppure, disgiuntamente a contrazioni; ove le stesse quadriche siano invece iperboloidi, i relativi coni asintotici dividono l'intorno di x_0 in zone nelle quali si ha contrazione.

In ogni caso, le velocità $dx \cdot D$ risultano connesse a deformazioni locali del corpo fluido. Per questo motivo D è detto *tensore delle velocità di deformazione*.

1.2.4.3.2 Tensore degli sforzi nei fluidi viscosi

Quando le dissipazioni di energia meccanica connesse al moto di un fluido divengono fatto importante nel fenomeno da studiare, non è più possibile prescindere dalle componenti tangenziali del tensore degli sforzi.

In generale, si ammette che il tensore degli sforzi dipenda dallo stato di deformazione locale del fluido, dalla velocità della deformazione locale in atto e delle vicissitudini subite dal fluido nella sua storia. Tuttavia, queste dipendenze non hanno sempre la stessa importanza. Così, i fluidi allo stato aeriforme e molti fluidi allo stato liquido, specie se costituiti da molecole molto semplici, conservano un ricordo degli stati di sollecitazione interna che si estingue rapidamente, riuscendo inapprezzabile già dopo tempi confrontabili con i nanosecondi. Escludendo i fenomeni che si svolgono in tempi confrontabili con la persistenza dei ricordi, è perciò possibile adottare uno schema di comportamento del fluido che prescinda del tutto dai fenomeni di memoria.

Quando gli effetti delle evoluzioni di assetto subite dal fluido sono da trascurare, riesce contemporaneamente irrilevante la dipendenza degli sforzi delle deformazioni. Manca infatti, nello schema che si impiega in tal caso, il modo di riconoscere il particolare stato di deformazione in atto, perchè non esiste la possibilità di confrontarlo con stati di riferimento precedenti, dei quali il fluido ha già perso il ricordo.

Resta perciò in evidenza solo la dipendenza del tensore degli sforzi T dalle velocità di deformazione, rappresentate dal tensore D . E' cioè $T = f(D)$.

Di solito lo schema è completato assumendo che il legame ora indicato non dipenda dal particolare riferimento locale scelto e richiedendo che esso si riduca alla forma $T = pI$, valida nel caso statico, quando le velocità di deformazione si annullano ed il fluido raggiunge uno stato di quiete.

Lo schema così completato è noto come schema di *fluido stokesiano*, in quanto suggerito da Stokes nel 1845.

E' sempre possibile scegliere gli assi di riferimento in modo che D appaia localmente nella forma diagonale (matrice diagonale): si dimostra che allora anche T deve assumere, nello stesso punto, forma diagonale.

Il più semplice legame fra le componenti del tensore degli sforzi e le componenti del tensore delle velocità di deformazione è quello lineare. Se si specializza ulteriormente in questo modo lo schema stokesiano, si dice che si costruisce uno schema di *fluido newtoniano*, perchè si ricade nelle ipotesi già utilizzate da Newton nel 1687.

Ricordando che il tensore degli sforzi deve assumere la forma $T = pI$ quando D si annulla, si vede che, per un fluido newtoniano deve essere:

$$\begin{aligned}\tau_{xx} &= p + \mu_{xx} D_{xx} + \mu_{xy} D_{yy} + \mu_{xz} D_{zz} \\ \tau_{yy} &= p + \mu_{yx} D_{xx} + \mu_{yy} D_{yy} + \mu_{yz} D_{zz} \\ \tau_{zz} &= p + \mu_{zx} D_{xx} + \mu_{zy} D_{yy} + \mu_{zz} D_{zz}\end{aligned}$$

quando gli assi sono scelti in modo da portare T e D a forma diagonale.

I vari coefficienti introdotti non possono però essere tutti distinti. Cambiando nome agli assi mutano pure i nomi delle componenti di T e D, ma non i loro valori. Di fatto, dunque, dei nove coefficienti, due soli sono indipendenti. Usualmente si pone:

$$\begin{aligned}\mu_{xx} &= \mu_{yy} = \mu_{zz} = -2\mu - \mu' \\ \mu_{xy} &= \mu_{xz} = \mu_{yx} = \mu_{yz} = \mu_{zx} = \mu_{zy} = -\mu'\end{aligned}$$

La dipendenza di T da D si presenta di conseguenza nella forma:

$$T = (p - \mu' \operatorname{div}(\vec{v})) I - 2\mu D. \quad (7)$$

Per ulteriori informazioni si può fare riferimento al testo di Marchi e Rubatta [28].

1.2.4.3.3 Equazioni meccaniche dei fluidi newtoniani

L'equazione costitutiva meccanica (7) rappresenta le ulteriori relazioni scalari che si ricercavano ai fini della soluzione del problema dell'equilibrio dinamico, secondo quanto asserito nel paragrafo 1.2.4.

Si ricorda che σ_x , σ_y , σ_z , generalmente differenti tra loro, hanno la somma invariante e, per estensione si può parlare di pressione p definita come $p = \frac{1}{3} \cdot (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)$. Il legame espresso dall'equazione (7) fra il tensore degli sforzi T e il tensore delle velocità di deformazione D specializza le due equazioni cardinali del moto.

La prima equazione indefinita del moto assume, a conti fatti, l'assetto

$$\rho \vec{F} - \operatorname{grad}(p) + \operatorname{grad}(\mu' \operatorname{div}(\vec{v})) + \operatorname{div}(2\mu D) = \rho \frac{D\vec{v}}{Dt},$$

La seconda equazione indefinita del moto,

$$[T]_{ik} = [T]_{ki}$$

è, di fatto automaticamente soddisfatta dall'equazione costitutiva (7) perché I è addirittura isotropo, e D è simmetrico per costruzione.

Se poi i coefficienti di viscosità μ e μ' risultano uniformi in tutta la massa fluida, la prima equazione indefinita del moto si riduce alla forma

$$\rho \vec{F} - \text{grad}(p) + (\mu + \mu') \text{grad}(\text{div}(\vec{v})) + \mu \nabla^2 \vec{v} = \rho \frac{D\vec{v}}{Dt},$$

detta equazione di Stokes.

Nel caso ancor più particolare di moto isocoro, l'equazione indefinita di continuità si riduce alla $\text{div } \vec{v} = 0$ e, contemporaneamente, la prima equazione indefinita del moto a viscosità μ uniforme si presenta come

$$\rho \vec{F} - \text{grad}(p) + \mu \nabla^2 \vec{v} = \rho \frac{D\vec{v}}{Dt}. \quad (8)$$

Quest'ultima forma è detta *equazione di Navier*.

L'integrazione dell'equazione di Navier ad un elemento finito di fluido da luogo all'equazione globale dell'equilibrio dinamico per fluido newtoniano incomprimibile:

$$\vec{G} + \vec{\Pi}_1 + \vec{M}_1 - \vec{M}_2 + \vec{I} - \mu \int_A \frac{\partial \vec{v}}{\partial n} dA = 0 \quad (9)$$

dove

$$\vec{\Pi}_1 = \int_A p \vec{n} dA$$

è la risultante delle spinte elementari per effetto della sola pressione p , mentre

$$-\mu \int_A \frac{\partial \vec{v}}{\partial n} dA$$

è il contributo dovuto alla viscosità, chiaramente nullo nell'ipotesi di fluido perfetto.

1.2.5 Azione di trascinamento di una corrente

L'intervento della viscosità nel moto dei fluidi reali in modo che gli sforzi che agiscono sulla parete del condotto in cui si muove una corrente presentino componenti tangenziali: si dice azione di trascinamento della corrente sull'involucro il risultante di queste componenti tangenziali; la forza ad essa opposta rappresenta la resistenza dell'involucro.

Secondo l'equazione (9), detta A_0 la superficie dell'involucro, T l'azione di trascinamento, si ha dunque per definizione:

$$T = \mu \int_{A_0} \frac{\partial \vec{v}}{\partial n} dA,$$

essendo n la direzione della normale interna (cioè diretta verso il fluido) nei singoli punti della parete.

L'azione di trascinamento si può calcolare agevolmente, in termini finiti, per il caso del moto uniforme in un condotto cilindrico: in questo caso particolare essa può anche essere definita come la componente, nella direzione del, della spinta esercitata dalla corrente sull'involucro.

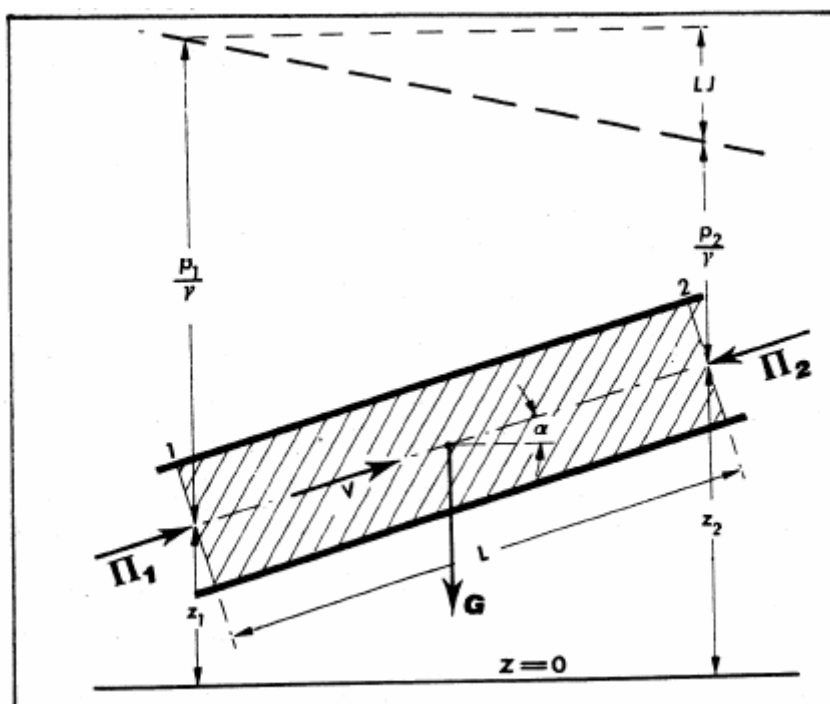


Fig. 1. Tronco di corrente in moto uniforme.

Si consideri il tronco di corrente, in moto uniforme indicato in fig. (1)¹, con sezione trasversale di area A e lunghezza L . Applicando ad essa l'equazione globale dell'equilibrio dinamico, proiettata nella direzione del moto: si perviene alla nota relazione:

$$T = \gamma A L J = \gamma W J, \quad (10)$$

essendo W il volume del fluido contenuto nel tronco considerato e J la cadente piezometrica.

¹ Per semplificare la figura, le spinte Π_1 , Π_2 sono applicate ai baricentri, anziché ai centri di spinta.

L'equazione (10) ha validità del tutto generale, per il moto uniforme in un condotto, sia che il moto sia laminare sia che sia turbolento; ciò è un'ovvia conseguenza del fatto che essa è stata dedotta a mezzo dell'equazione globale, che prescinde completamente dalla considerazione di quel che avviene all'interno della massa fluida in esame.

Particolarmente interessante è anche la considerazione dell'azione di trascinamento unitaria, cioè esercitata sull'unità di superficie dell'involucro; essa ha le dimensioni di uno sforzo e la si può anche definire sforzo tangenziale alla parete.

In un condotto cilindrico circolare essa è uniformemente distribuita, in conseguenza della simmetria assiale; per un condotto di sezione qualsiasi ciò invece non avviene, ma sarà sempre possibile calcolarne il valor medio. Lo si otterrà dividendo l'azione di trascinamento complessiva per l'area della superficie laterale del condotto: detto P il perimetro della sezione trasversale cui viene dato il nome tradizionale di *contorno bagnato*, e τ_0 lo sforzo tangenziale alla parete, si ottiene:

$$\tau_0 = \frac{T}{LP} = \frac{\gamma ALJ}{LP} = \gamma \frac{A}{P} J = \gamma RJ. \quad (11)$$

Nell'equazione (11) compare il rapporto $R=A/P$ fra l'area della sezione trasversale ed il suo perimetro, definito *raggio medio* o *raggio idraulico*; per un condotto a sezione circolare esso equivale ad un quarto del diametro.

La considerazione del raggio idraulico è assai utile nell'idraulica pratica e in particolare nello studio della legge del moto uniforme. L'esperienza ha infatti mostrato che per le correnti turbolente, di cui si parlerà diffusamente più avanti, il raggio idraulico basta a caratterizzare, in prima approssimazione, la geometria macroscopica della condotta. Di fatto si vedrà come diventa importante, per condotte diverse dalla circolare, un fattore di forma, che viene evidentemente posto uguale ad 1 per condotte circolari (si veda il par. 2.9).

1.3 Moto uniforme di correnti in pressione

Nella sua essenza il problema può essere posto come segue: individuare la relazione esistente fra la cadente J della corrente e tutte le altre grandezze da cui essa può dipendere.

Sarà questo il problema che verrà sviluppato nel seguito, attingendo all'*indagine teorica*, di cui si è dato cenno nei paragrafi precedenti, e all'*indagine su basi sperimentali*, di importanza preminente soprattutto nelle condizioni di moto turbolento.

Una semplice analisi qualitativa porta a riconoscere che queste grandezze possono suddividersi in tre categorie e precisamente:

a) grandezze geometriche;

a.1) area della sezione trasversale;

a.2) contorno bagnato;

(l'insieme a.1) e a.2) danno luogo all'unica grandezza comunemente considerata è cioè il raggio idraulico);

a.3) scabrezza della parete;

a.4) forma della sezione trasversale;

b) grandezze cinematiche;

b.1) velocità media

c) grandezze dinamiche;

c.1) viscosità dinamica;

c.2) densità;

c.3) comprimibilità (quando si tratti di un gas ed il moto dia luogo a considerevoli variazioni della pressione).

Se il moto è uniforme, è implicito che la condotta sia cilindrica, essendo del resto imprecisata la forma della sezione trasversale.

1.4 Condizioni al contorno

Si indicano, ora, le condizioni al contorno proprie dei moti dei fluidi nei condotti.

La frontiera del dominio interessato dal moto di un fluido è una superficie che non viene attraversata dal fluido stesso. Sulla frontiera, perciò, la componente della velocità v del fluido in direzione normale a tale superficie deve coincidere con la velocità di spostamento di questa nella medesima direzione. In particolare, se la frontiera è ferma nel riferimento adottato, la velocità del fluido deve presentare, su di essa, componente normale nulla.

Se $f(x,t)=0$ è l'equazione della frontiera, e se questa ammette versore normale

$$\vec{n} = \frac{\text{grad}(f)}{|\text{grad}(f)|}$$

la velocità v_{fn} con la quale la frontiera stessa si muove lungo n vale

$$v_{fn} = - \frac{\frac{\partial f}{\partial t}}{\frac{\partial f}{\partial n}} = - \frac{\frac{\partial f}{\partial t}}{\vec{n} \cdot \text{grad}(f)} = - \frac{\frac{\partial f}{\partial t}}{|\text{grad}(f)|}.$$

Come si è detto, la velocità v del fluido deve assumere, sulla superficie $f(x,t)=0$, componente lungo n identica a v_{fn} : deve essere cioè

$$v_{fn} - v_n = v_{fn} - \vec{v} \cdot \vec{n} = 0.$$

Ne segue subito

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{n} |\text{grad}(f)| = \frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v} \cdot \text{grad}(f) = \frac{D}{Dt} f = 0.$$

Il fatto che la componente normale della velocità del fluido relativa alla frontiera $v_n - v_{fn}$ sia nulla su ogni punto di questa superficie non è sufficiente per concludere che gli elementi fluidi situati su di essa in un dato istante non possano successivamente allontanarsene. Così elementi di frontiera possono divenire elementi fluidi interni, e viceversa, come avviene, ad esempio, in corrispondenza alla comparsa ed alla scomparsa di bolle in seno ad un liquido o di gocce in un aeriforme.

Per la componente della velocità del fluido tangente alla frontiera non esistono vincoli cinematici. Tuttavia, l'osservazione sperimentale ha mostrato che la componente tangenziale della velocità coincide con l'analoga componente della velocità frontiera, se questa è costituita da una parete

solida. Si dice usualmente che il fluido aderisce alle pareti. (Evidentemente nello schema di ideale, quest'ultima, quest'ultima condizione può non essere rispettata).

In virtù della condizione di aderenza del fluido alle pareti solide, si impone che, alla frontiera, la componente tangenziale della velocità del fluido coincida con la velocità di scorrimento della parete su se stessa. Complessivamente, la velocità del fluido a contatto con pareti solide è uguale alla velocità di tali pareti, e perciò si annulla quando queste sono ferme.

2 ANALISI DEL MOTO LAMINARE IN CONDOTTE CILINDRICHE CON SEZIONI DI VARIO TIPO

Si considera il moto permanente di un fluido a viscosità dinamica μ e densità ρ uniformi e stazionarie, che si svolge con traiettorie rettilinee e parallele nel campo del geopotenziale $\Phi = -g\zeta$.

Assunto come riferimento ortogonale x, y, z , ed assegnati all'asse x direzione e verso coincidenti con quelli della velocità v , si osserva intanto che, in base all'equazione di continuità $\text{div } v = 0$, ormai ridotta alla forma $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$, l'unica componente non nulla della velocità, la u , può dipendere solo dalle coordinate trasversali y e z .

La prima equazione indefinita del moto, la cui forma adatta al problema in esame è quella di Navier, è:

$$\rho \vec{F} - \text{grad}(p) + \mu \nabla^2 \vec{v} = \rho \frac{D\vec{v}}{Dt},$$

la quale ammette le proiezioni

$$-\frac{\partial}{\partial x} (\rho g\zeta + p) + \mu \nabla^2 u = 0,$$

$$-\frac{\partial}{\partial y} (\rho g\zeta + p) = 0,$$

$$-\frac{\partial}{\partial z} (\rho g\zeta + p) = 0.$$

Ponendo $\gamma = \rho g$, le ultime due equazioni possono essere riscritte nella forma

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\zeta + \frac{p}{\gamma} \right) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\zeta + \frac{p}{\gamma} \right) = 0$$

ed evidenziare che il carico piezometrico

$$h = \zeta + \frac{p}{\gamma}$$

è uniforme su ciascun piano ortogonale all'asse x , e quindi che la pressione p varia con legge idrostatica lungo i singoli piani trasversali.

Il carico piezometrico cambia invece al mutare della x . In accordo con la proiezione lungo x dell'equazione di Navier, deve essere

$$-\frac{\partial}{\partial x} \left(\zeta + \frac{p}{\gamma} \right) + \frac{\mu}{\gamma} \nabla^2 u = 0.$$

Come u , anche $\nabla^2 u$ è indipendente da x . Così la variazione del carico piezometrico con x è uniforme. Normalmente si pone in evidenza la caduta del carico piezometrico, per unità di percorso nel verso della corrente, nel seguente modo:

$$J = -\frac{\partial}{\partial x} \left(\zeta + \frac{p}{\gamma} \right),$$

e si indica questa grandezza con il termine *cadente piezometrica*. L'uniformità del carico piezometrico sulle singole sezioni trasversali assicura la stessa uniformità alla J .

In base alla componente lungo x dell'equazione di Navier e alla definizione di cadente piezometrica, la distribuzione della velocità longitudinale u su ciascuna sezione trasversale è retta dall'equazione di Poisson:

$$\nabla^2 u = -\frac{\gamma J}{\mu}, \quad (12)$$

e risulta determinata una volta fissata la forma della sezione trasversale della corrente e le condizioni cinematiche esistenti sul suo contorno.

2.1 Moto in condotto a sezione circolare

Nel caso di corrente in un tubo di sezione circolare di diametro D , conviene ricorrere alle coordinate cilindriche indicate in fig. (2), anziché alle coordinate cartesiane ortogonali.

Il flusso può essere, infatti, considerato in condizioni di simmetria assiale rispetto all'asse del condotto (fig. 2):

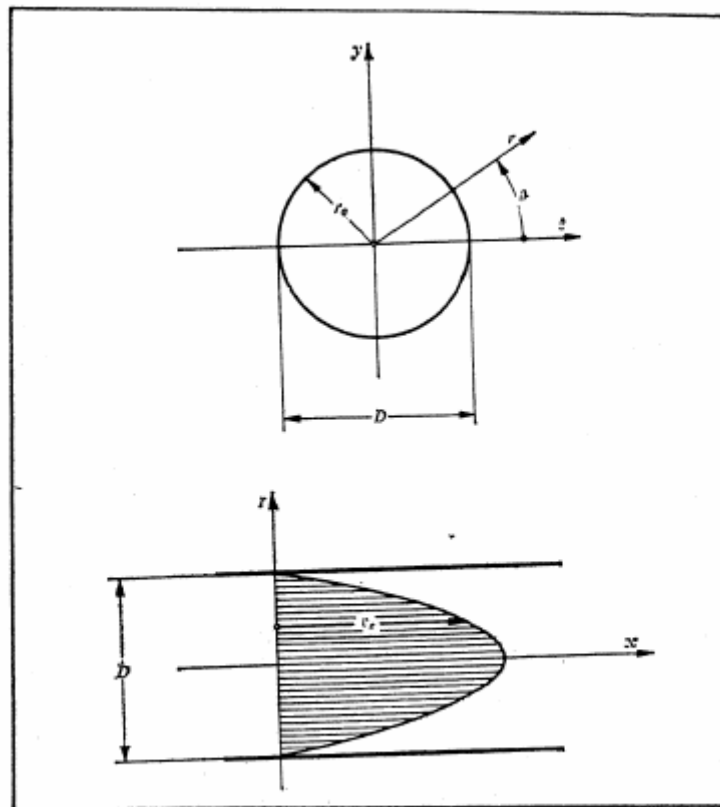


Fig. 2. Moto in condotto cilindrico circolare.

$$\nabla^2 u = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = -\frac{\gamma J}{\mu}. \quad (13)$$

In virtù delle condizioni di simmetria già richiamate, tutti i parametri sono indipendenti da θ , sicché l'equazione (13) diviene:

$$\frac{dG}{dr} + \frac{1}{r}G = -\frac{\gamma J}{\mu}, \quad (14)$$

avendo $G = du/dr$. La soluzione complementare G_c può essere trovata risolvendo l'omogenea associata dell'equazione (14), così come proposto da I. H. Shames (44). Cioè

$$\frac{dG_c}{dr} = -\frac{1}{r}G_c.$$

Separando le variabili ed integrando:

$$\ln G_c = -\ln r + \ln C_1,$$

dove in C_1 è la costante di integrazione. Combinando le espressioni logaritmiche si ottiene:

$$G_c = \frac{C_1}{r}.$$

Una soluzione particolare può essere facilmente trovata in $G_p = -\frac{\gamma J r}{(2\mu)}$, sicché la soluzione generale per G diviene:

$$G = -\frac{\gamma J}{2\mu}r + \frac{C_1}{r}.$$

Sostituendo con du/dr , si può effettuare la seconda integrazione. Pertanto:

$$u(r) = -\frac{\gamma J}{4\mu}r^2 + C_1 \ln r + C_2.$$

Quando $r=0$, il termine in r diventa infinito (si veda la figura. (3)), pertanto la costante C_1 deve essere zero per rendere il caso fisicamente possibile.

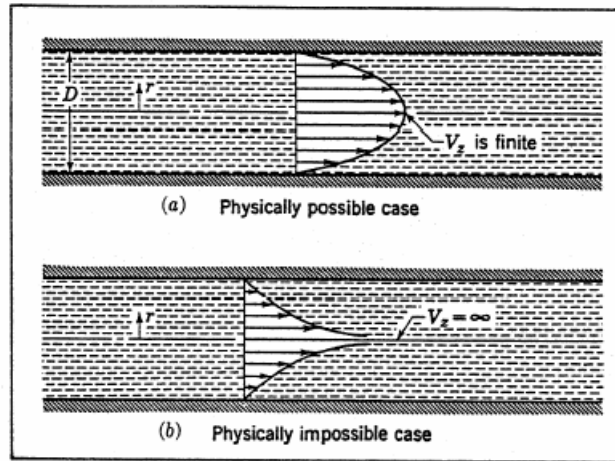


Fig. 3 Caso fisicamente possibile (a); caso fisicamente impossibile (b).

Per le condizioni al contorno, che impongono velocità nulla alla parete, si ottiene

$C_2 = \gamma J D^2 / (16\mu)$. L'equazione finale per il profilo di velocità diviene:

$$u(r) = \frac{\gamma J}{4\mu} \left(\frac{D^2}{4} - r^2 \right).$$

La velocità massima si ha sull'asse del condotto (fig. (3)), con il seguente valore:

$$u_{\max} = \frac{\gamma J}{16\mu} D^2.$$

La velocità, tra l'altro, decresce con legge parabolica allontanandosi dall'asse del condotto.

La portata volumetrica ammonta a :

$$Q = \int_0^{D/2} 2\pi r u dr = \frac{\gamma J}{128\mu} \pi D^4; \quad (\text{Formula di Poiseuille.})$$

la velocità media è pertanto:

$$V = \frac{Q}{\pi \frac{D^2}{4}} = \frac{\gamma J}{32\mu} D^2 = \frac{1}{2} \frac{\gamma J}{\mu} R^2,$$

ed è quindi pari alla metà della velocità massima.

Si prova per un attimo a ripetere le considerazioni fin qui fatte per il caso di fluido perfetto, per il quale valgono le seguenti condizioni semplificative: $\mu=0$ (per ipotesi) e $J=0$ (come evidente conseguenza del teorema di Bernoulli e dell'uniformità del moto). Valendo la seguente relazione:

$$T = -\mu \int_{A_0} \frac{\partial u}{\partial r} dA = -\mu \frac{du}{dr} \cdot 2\pi r L,$$

(avendo indicato con L la lunghezza del tronco in esame) e per la (10), si ha:

$$\mu \frac{du}{dr} = -\frac{\gamma J}{2} r. \quad (15)$$

Dunque, per le ipotesi già richiamate, si perviene ad una banale identità dell'equazione (15), che non servirebbe ad individuare la distribuzione della velocità. Qualunque distribuzione di velocità risulterebbe compatibile con le ipotesi. L'osservazione fatta prova l'astrattezza dell'ipotesi di fluido perfetto e la sua inaccettabilità per lo studio del moto con riferimento alle cause che lo determinano. Ritornando al caso di fluido reale definiamone lo stato tensionale.

Le tensioni tangenziali assumono la seguente legge:

$$\tau_{rx} = -\mu \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\gamma J}{2} r,$$

variando linearmente e assumendo il valore massimo in corrispondenza della parete dove la tensione vale, appunto:

$$[\tau_{rx}]_{r=D/2} = \frac{\gamma J}{4} D.$$

2.2 Moto fra facce piane parallele

Vale la pena esaminare una differente situazione di moto laminare per la quale si giunge facilmente ad una soluzione in termini analitici: essa può presentare qualche interesse di carattere pratico, ma soprattutto condurrà ad un confronto significativo col caso precedente trattato. Si tratta, appunto, del moto per filetti paralleli di un fluido fra due facce piane parallele indefinite. Questo moto può definirsi piano, o bidimensionale, poiché quel che avviene in un piano parallelo al vettore velocità e normale alle due facce di contorno del campo si riproduce identicamente in tutti gli altri piani ad esso paralleli.

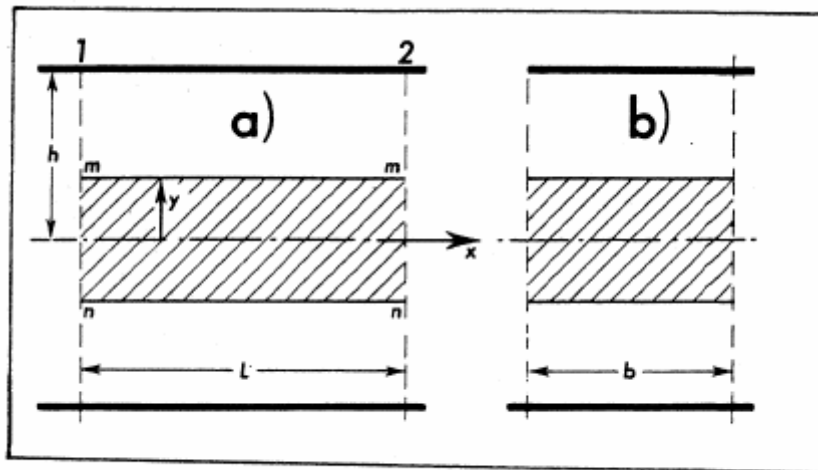


Fig. 4. Moto fra facce piane parallele.

Il piano del moto è rappresentato in fig. (4.a) mentre la fig. (4.b) rappresenta una sezione trasversale della corrente, limitata ad una striscia di larghezza b .

L'equazione di Poisson si riduce, per la particolare situazione di simmetria a:

$$\frac{d^2 u}{dy^2} = -\frac{\gamma J}{\mu},$$

sempre perché il moto è uniforme. Si ha dunque:

$$J = -\frac{\mu}{\gamma} \frac{d^2 u}{dy^2};$$

integrando una prima volta con la condizione, dovuta alla simmetria, che la velocità sia massima sul piano mediano, e cioè:

$$y=0 \rightarrow \frac{du}{dy} = 0$$

si ottiene:

$$\frac{du}{dy} = -\frac{\gamma J}{\mu} y.$$

Una ulteriore integrazione con la condizione che la velocità sia nulla a contatto con le pareti solide:

$u=0$ per $y=\pm h$, essendo h il semispessore della corrente, consente di ottenere:

$$u(y) = \frac{\gamma J}{2\mu} (h^2 - y^2);$$

La distribuzione della velocità, anche in questo caso, è parabolica, con massimo:

$$u_{\max} = \frac{\gamma J}{2\mu} h^2$$

in corrispondenza del piano mediano.

Integrando la velocità sull'intera sezione, si ha la portata:

$$Q = 2 \int_0^h u b dy = \frac{2}{3} \frac{\gamma J}{\mu} b h^3;$$

e dividendo per l'area della sezione trasversale si ha la velocità media:

$$V = \frac{Q}{2bh} = \frac{1}{3} \frac{\gamma J}{\mu} h^2 = \frac{2}{3} u_{\max}. \quad (16)$$

Per il confronto che si intende istituire con il caso del moto in condotto di sezione circolare, conviene introdurre anche qui, come lunghezza caratteristica, anziché il semispessore h , il raggio idraulico:

$$R = \frac{2bh}{2b} = h,$$

e l'equazione (16) si può scrivere anche:

$$V = \frac{1}{3} \frac{\gamma J}{\mu} R^2.$$

Per confronto con la velocità media ottenuta per la sezione circolare, si può concludere che in entrambi i casi la velocità media risulta direttamente proporzionale al peso specifico, alla cadente piezometrica e al quadrato del raggio idraulico ed inversamente proporzionale alla viscosità. Il coefficiente di proporzionalità non è però lo stesso nei due casi: esso vale infatti $\frac{1}{2}$ per il condotto cilindrico circolare, $\frac{1}{3}$ per il moto fra due facce piane indefinite.

In generale, per il moto viscoso, la velocità media è data da una formula del tipo:

$$V = \alpha \frac{\gamma J}{\mu} R^2,$$

con α coefficiente dipendente dalla forma della sezione del condotto.

L'importante conclusione è che il raggio idraulico non è sufficiente a individuare completamente la geometria della sezione: accanto ad esso deve necessariamente comparire un coefficiente di forma della sezione trasversale.

Per quanto riguarda le tensioni tangenziali, nel caso della sezione a facce piane parallele, esse sono date dalla relazione:

$$\tau_{yx} = -\mu \frac{\partial u}{\partial y} = \gamma J y,$$

analoga, strutturalmente, a quella ricavata per la sezione circolare.

2.3 Moto in condotti a sezione anulare

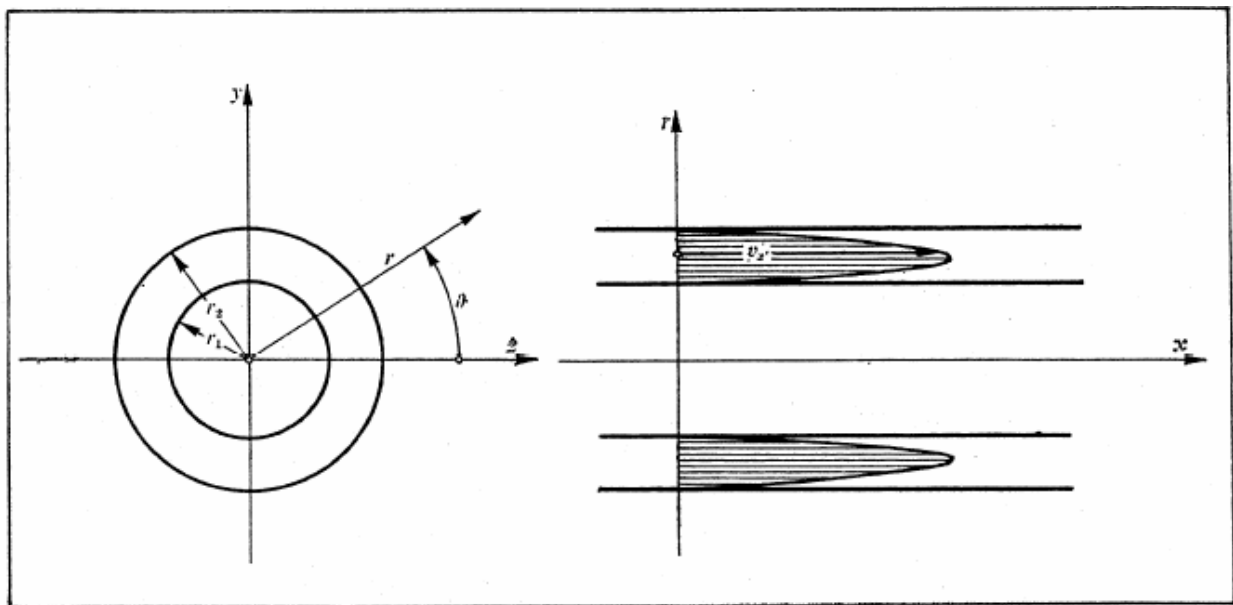


Fig. 5. Moto in condotto a sezione anulare.

Facendo riferimento alla fig. (5), si esamina ora il moto rettilineo nell'intercapedine fra due tubi a sezione circolare e coassiali, di raggi r_1 ed $r_2 > r_1$. Se le pareti sono ferme, la distribuzione della velocità è ora:

$$u(r) = \frac{\gamma J}{4\mu} \left[(r_2^2 - r^2) - \frac{\ln \frac{r_2}{r}}{\ln \frac{r_2}{r_1}} (r_2^2 - r_1^2) \right],$$

che ha appunto laplaciano uniformemente uguale a $-\gamma J/\mu$ in tutto il dominio $r_1 \leq r \leq r_2$, e che si riduce a zero per $r=r_1$ e per $r=r_2$.

Il massimo di velocità si realizza sul raggio:

$$r = \sqrt{\frac{r_2^2 - r_1^2}{2 \ln \frac{r_2}{r_1}}}.$$

La portata e la velocità media sono, nell'ordine:

$$Q = \int_{r_1}^{r_2} 2\pi r u dr = \frac{\gamma J}{8\mu} \pi (r_2^2 - r_1^2) \left[r_2^2 + r_1^2 - \frac{r_2^2 - r_1^2}{\ln \frac{r_2}{r_1}} \right],$$

$$V = \frac{Q}{\pi (r_2^2 - r_1^2)} = \frac{\gamma J}{8\mu} \left[r_2^2 + r_1^2 - \frac{r_2^2 - r_1^2}{\ln \frac{r_2}{r_1}} \right].$$

Essendo il raggio idraulico $R = (r_2 - r_1)/2$, l'espressione della velocità media, mettendo in evidenza un coefficiente di forma definito nel paragrafo precedente, diviene:

$$V = \alpha \frac{\gamma J}{\mu} R^2,$$

con:

$$\alpha = \frac{1}{2} \frac{\left(\frac{r_2}{r_1} \right)^2 + 1 - \frac{\left(\frac{r_2}{r_1} \right)^2 - 1}{\ln \frac{r_2}{r_1}}}{\left(\frac{r_2}{r_1} - 1 \right)^2}.$$

Per quanto attiene lo stato tensionale, si ha:

$$\tau_{rx} = \mu \frac{\partial u}{\partial n} = -\mu \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\gamma J}{4} \left[2r - \frac{r_2^2 - r_1^2}{r \ln \frac{r_2}{r_1}} \right].$$

Questa espressione è valida dalla parete esterna al punto di massimo della velocità, altrimenti:

$$\tau_{-r,x} = -\mu \frac{\partial u}{\partial (-r)} = \frac{\gamma J}{4} \left[\frac{r_2^2 - r_1^2}{r \ln \frac{r_2}{r_1}} - 2r \right].$$

In appendice A si riporta un'applicazione sul moto laminare in condotto anulare.

2.4 Moto in condotto a sezione ellittica

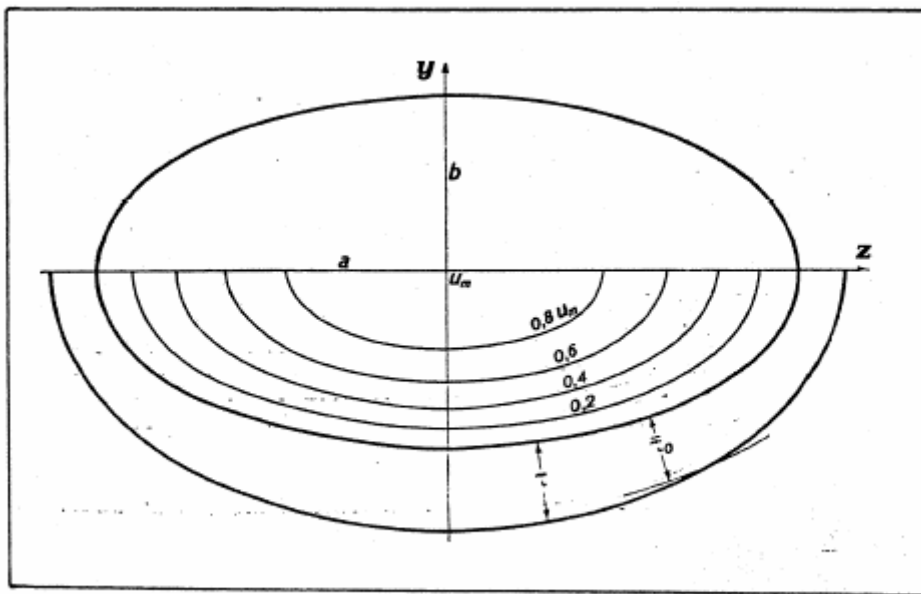


Fig. 6. Moto in condotto a sezione ellittica.

Data la ellisse in fig. (6) di semiassi a, b con $a > b$, la sua equazione (equazione del contorno della sezione del condotto) è:

$$\left(\frac{z}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1,$$

cioè:

$$f(y, z) = (z/a)^2 + (y/b)^2 - 1 = 0. \quad (17)$$

La distribuzione di velocità è:

$$u(y, z) = \frac{\gamma J}{2\mu} \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2} \left(1 - \frac{z^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right),$$

che soddisfa l'equazione di Poisson e la condizione al contorno per la quale $u=0$ per (y,z) tali che $f(y,z)=0$.

Ricordando che i coseni direttori della normale nel generico punto di una curva di equazione $f(y,z)=0$ si esprimono nella forma:

$$\begin{aligned} n_z &= \frac{dz}{dn} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}} \cdot \frac{\partial f}{\partial z} \\ n_y &= \frac{dy}{dn} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}} \cdot \frac{\partial f}{\partial y} \end{aligned} \quad (18)$$

ponendo

$$\vec{n} = n_y \vec{j} + n_z \vec{k},$$

il vettore infinitesimo $d\vec{n} = dn * \vec{n}$ è:

$$d\vec{n} = dz \vec{k} + dy \vec{j} = dn \cdot n_z \vec{k} + dn \cdot n_y \vec{j}.$$

Alla luce di questo, le tensioni possono essere così calcolate:

$$\tau_{nz} = -\mu \frac{\partial u}{\partial n} = -\mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \frac{dy}{dn} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{dz}{dn} \right) = -\mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \cdot n_y + \frac{\partial u}{\partial z} \cdot n_z \right)$$

dove

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\gamma J}{\mu} \frac{a^2}{a^2 + b^2} \cdot y$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{\gamma J}{\mu} \frac{b^2}{a^2 + b^2} \cdot z.$$

Inoltre, per le equazioni (17) e (18), risultano verificate le seguenti relazioni:

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{2z}{a^2}, \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2y}{b^2},$$

$$\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2} = \sqrt{\frac{4z^2}{a^4} + \frac{4y^2}{b^4}};$$

$$n_y = \frac{\frac{2y}{b^2}}{2\sqrt{\left(\frac{z}{a^2}\right)^2 + \left(\frac{y}{b^2}\right)^2}};$$

$$n_z = \frac{\frac{2z}{a^2}}{2\sqrt{\left(\frac{z}{a^2}\right)^2 + \left(\frac{y}{b^2}\right)^2}}$$

Pertanto:

$$\tau_{nx} = \frac{\gamma J}{a^2 + b^2} \sqrt{a^4 y^2 + b^4 z^2}.$$

Nel caso di $a=b=r$, si ricade nelle formule del condotto circolare.

2.5 Moto in condotto a sezione triangolare equilatera

Si faccia riferimento alla sezione triangolare equilatera di altezza $3b$, rappresentata in fig. (7).

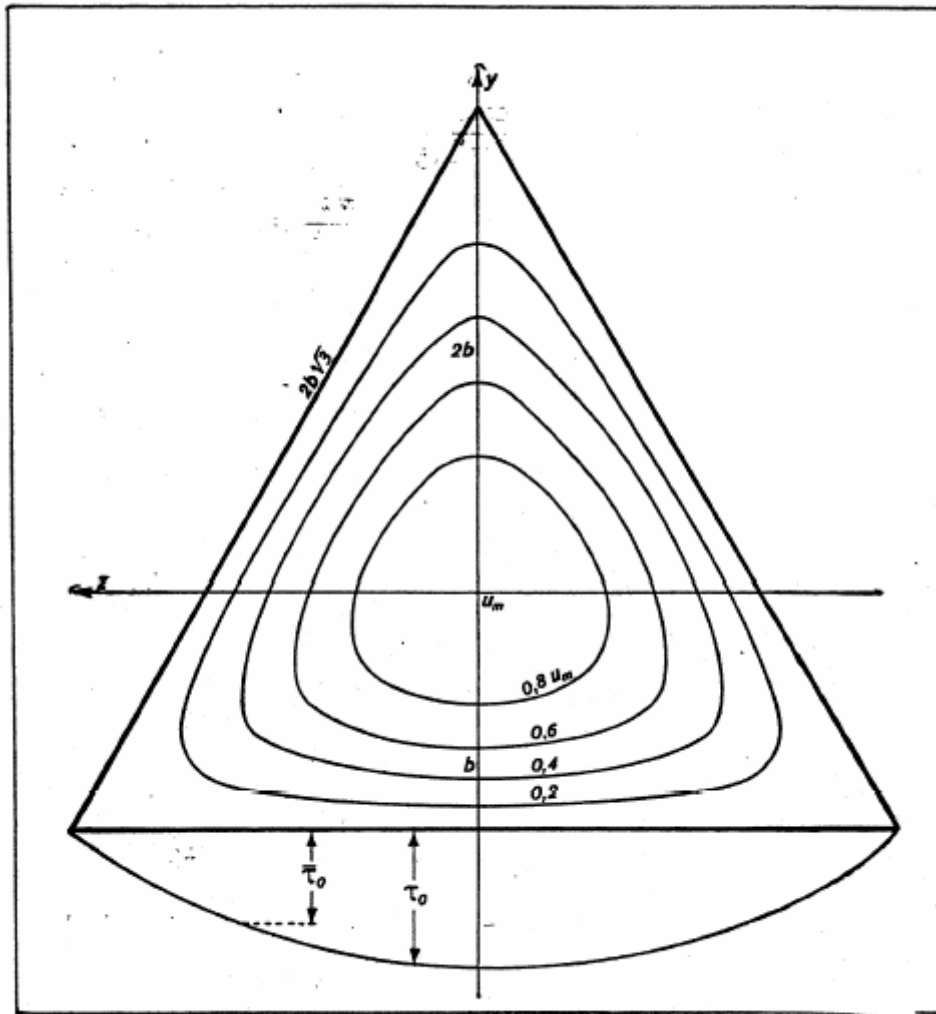


Fig. 7. Moto in condotto a sezione triangolare equilatera.

Le equazioni delle rette che individuano il contorno sono:

$$y = -b$$

$$y = -\sqrt{3}z + 2b$$

$$y = \sqrt{3}z + 2b.$$

La condizione al contorno si esprimerà richiedendo che $u = 0$ per $f(y, z) = 0$ con

$$f(y, z) = (y+b) (y+\sqrt{3}z-2b) (y-\sqrt{3}z-2b) = 0.$$

Si ricava, allora, come soluzione dell'equazione di Poisson, la seguente distribuzione di velocità:

$$u(y, z) = \frac{\gamma J}{4\mu} \frac{y+b}{b} \left[\frac{(2b-y)^2}{3} - z^2 \right] .$$

La distribuzione di tensioni lungo il lato parallelo all'asse z è:

$$\tau_{zx} = \frac{\gamma J}{4b} (3b^2 - z^2) .$$

2.6 Moto in condotto a sezione rettangolare

Si riporta ora il caso, anch'esso tecnicamente interessante, della sezione rettangolare, di larghezza b e di altezza d , schematizzata in fig. (8).

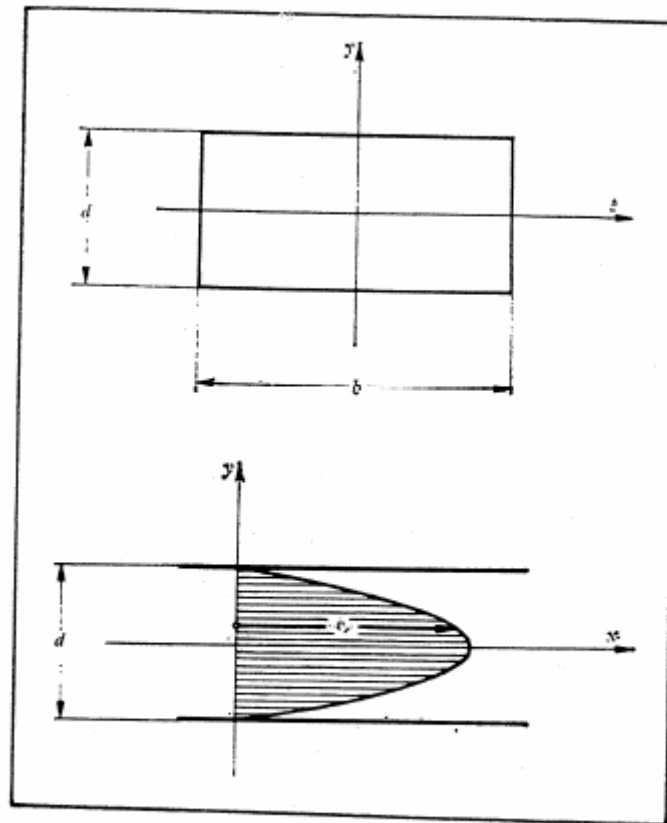


Fig. 8. Moto in condotto a sezione rettangolare.

Sempre ammesso che la parete sia ferma rispetto all'osservatore, la distribuzione della velocità è fornita dalla formula:

$$u(y, z) = \frac{\gamma J}{2\mu} \left\{ \frac{d^2}{4} - y^2 - d^2 \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{8}{(2k+1)^3 \pi^3} \cdot \right.$$

$$\left. \cos \left[(2k+1) \pi \frac{y}{d} \right] \frac{\cosh \left[(2k+1) \pi \frac{z}{d} \right]}{\cosh \left[(2k+1) \pi \frac{b}{2d} \right]} \right\},$$

che è in accordo con l'equazione di Poisson e che porta a velocità longitudinali nulle su $y = \pm d/2$ e

su $z = \pm b/2$. Per controllare quest'ultimo asserto basta tener presente l'identità:

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{8}{(2k+1)^3 \pi^3} \cos \left[(2k+1) \pi \frac{y}{d} \right] = \frac{1}{4} - \left(\frac{y}{d} \right)^2.$$

La velocità è massima sull'asse del condotto, ove è:

$$u_{\max} = \frac{\gamma J}{8\mu} d^2 \left\{ 1 - \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{32}{(2k+1)^3 \pi^3} \frac{1}{\cosh \left[(2k+1) \pi \frac{b}{2d} \right]} \right\};$$

la portata e la velocità media sono:

$$Q = 4 \int_0^{d/2} \int_0^{b/2} u dz dy = \frac{\gamma J}{\mu} \frac{bd^3}{12} \left\{ 1 - \frac{192}{\pi^5} \frac{d}{b} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\tanh \left[(2k+1) \pi \frac{b}{2d} \right]}{(2k+1)^5} \right\},$$

$$V = \frac{Q}{bd} = \frac{\gamma J}{\mu} \frac{d^2}{12} \left\{ 1 - \frac{192}{\pi^5} \frac{d}{b} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\tanh \left[(2k+1) \pi \frac{b}{2d} \right]}{(2k+1)^5} \right\}.$$

Per quanto attiene lo stato tensionale valgono le seguenti relazioni:

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = -\mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) = -\mu \frac{\partial u}{\partial y}$$

$$\tau_{zx} = \tau_{xz} = -\mu \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) = -\mu \frac{\partial u}{\partial z}$$

$$\tau_{yz} = \tau_{zy} = -\mu \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) = 0.$$

In particolare:

$$\tau_{yx} = \frac{\gamma J}{2} \{ 2y - d \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{8}{(2k+1)^2 \pi^2} \sin[(2k+1) \pi \frac{y}{d}] \cdot$$

$$\cdot \frac{\cosh[(2k+1) \pi \frac{z}{d}]}{\cosh[(2k+1) \pi \frac{b}{2d}]} \}$$

$$\tau_{zx} = \frac{\gamma J}{2} d \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{8}{(2k+1)^2 \pi^2} \cos[(2k+1) \pi \frac{y}{d}] \cdot$$

$$\cdot \frac{\sinh[(2k+1) \pi \frac{z}{d}]}{\cosh[(2k+1) \pi \frac{b}{2d}]} \}.$$

Ai fini delle pratiche applicazioni è sufficiente porre:

$$u_{\max} = \frac{\gamma J}{8\mu} d^2 f_1 \left(\frac{b}{d} \right), Q = \frac{\gamma J}{\mu} \frac{bd^3}{12} f_2 \left(\frac{b}{d} \right), V = \frac{\gamma J}{\mu} \frac{d^2}{12} f_2 \left(\frac{b}{d} \right)$$

ed impiegare i valori di f_1 ed f_2 riportati nella tabella (2) e diagrammati in fig. (9).

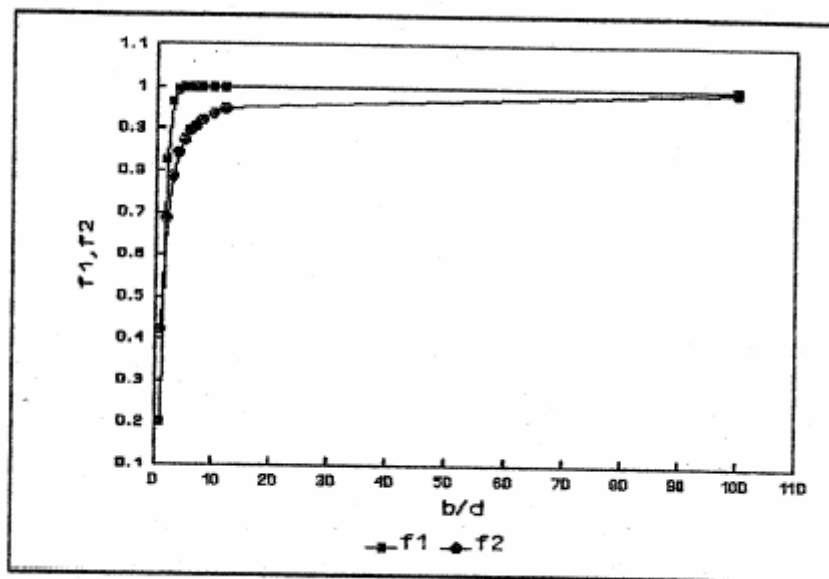


Fig. 9. Diagrammi dei coefficienti f_1 e f_2 .

Coefficienti per il calcolo della velocità massima e della portata in un condotto rettangolare.

$\frac{b}{d}$	f_1	f_2
1	0,2042	0,4224
2	0,8275	0,6870
3	0,9641	0,7881
4	0,9925	0,8434
5	0,9985	0,8747
6	0,9997	0,8957
7	0,9999	0,9079
8	0,9999	0,9218
10	1,0000	0,9375
12	1,0000	0,9486
100	1,0000	0,9936
∞	1	1

Tab. 2.

2.7 Metodo delle differenze finite

Con riferimento al paragrafo precedente e alla fig. (10), si sviluppa un metodo per il calcolo della velocità puntuale, che consenta, di fatto, la risoluzione dell'equazione differenziale di Poisson attraverso la soluzione di un sistema lineare, il cui numero di incognite è strettamente legato al grado di approssimazione richiesto.

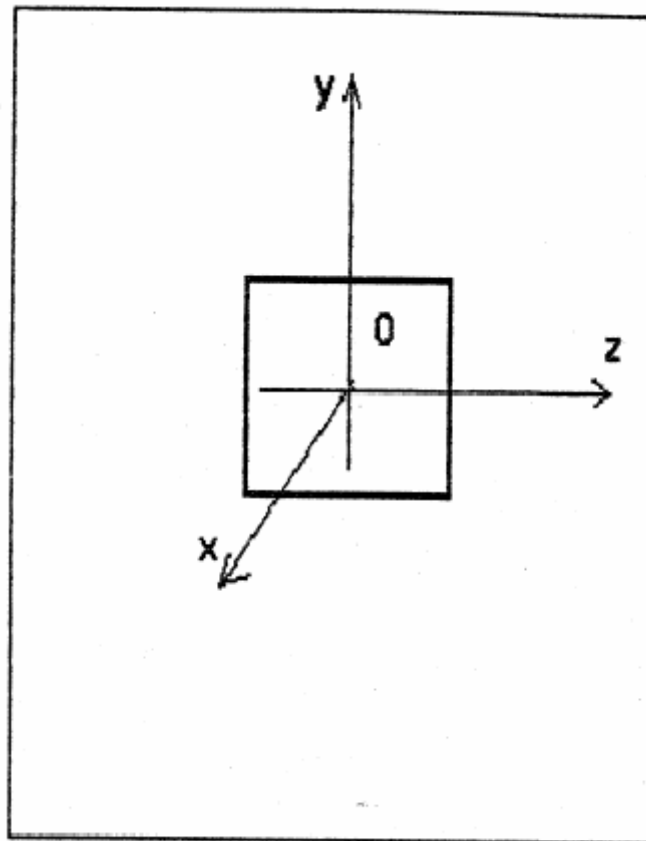


Fig. 10. Sistema di riferimento.

Si tratta , in pratica, di un metodo di risoluzione numerica che ben si presta ad essere tradotto in un linguaggio di programmazione, eliminando, così, il suo unico difetto, legato, appunto, alla difficoltà di risoluzione di sistemi lineari a molte incognite.

Come ogni metodo numerico, è importante, per chi ne faccia uso, conoscere il grado di approssimazione dei risultati ottenuti. Pertanto, nel seguito, si definirà questo punto.

Fissata l'attenzione su una sezione trasversale, si consideri, facendo riferimento alla fig. (10), un moto piano, ossia ipotizziamo, in un primo momento, u funzione della sola y ; si supponga, ancora, di non conoscere la funzione $u(y)$, ma di conoscere i valori che essa assume in tre determinati punti: A , B e C .

Ci si chiede: è possibile calcolare la $u(y)$ e le sue derivate partendo solo da questi punti? Questo si può fare, ma accettando un certo errore. Se, per esempio, si considera una parabola passante per A , B e C , si ottiene una curva che, come la $u(y)$, passa per A , B e C , ma è, in generale, diversa da $u(y)$: sia $u_1(y)$ questa curva.

Come illustrato in fig. (11), si consideri un riferimento con origine $O \equiv k$ di asse y , e i punti $(k-1)$ e $(k+1)$ equidistanti Δ rispetto ad k .

L'equazione di una generica parabola è:

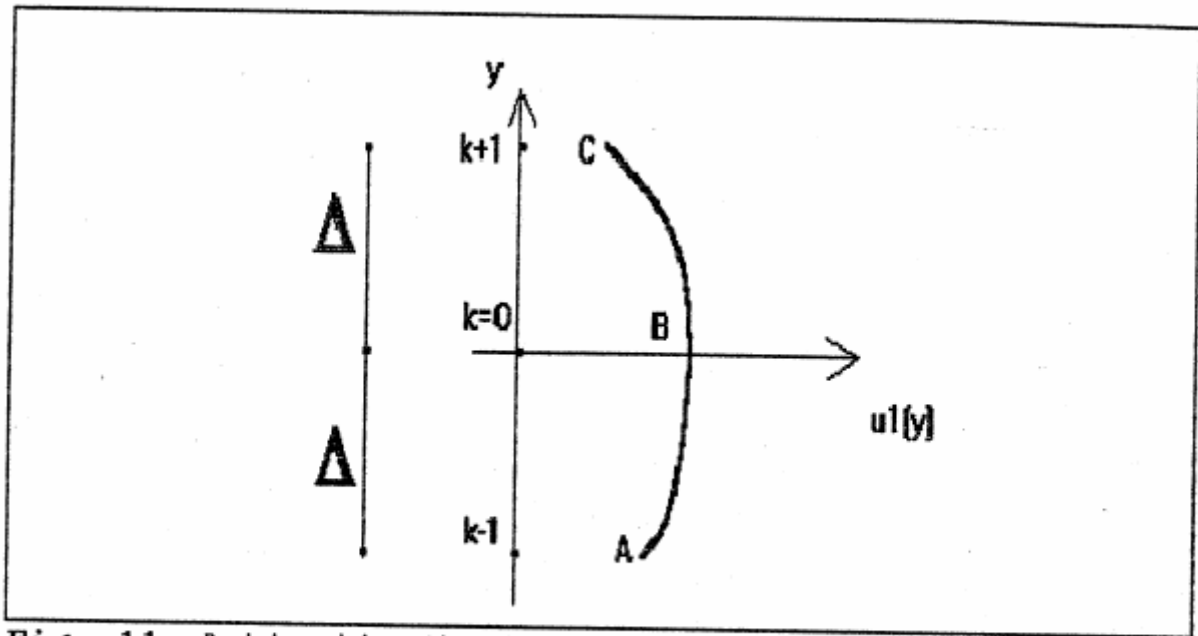


Fig. 11. Posizione dei punti noti.

$$u_1(y) = a_0 + a_1 y + a_2 y^2 \quad (19)$$

Si imponga che la (19) passi per A, B e C:

$$y = 0 \quad u_1(y) = a_0 = u(k)$$

$$y = \Delta \quad u_1(y) = a_0 + a_1 \Delta + a_2 \Delta^2 = u(k+1)$$

$$y = -\Delta \quad u_1(y) = a_0 - a_1 \Delta + a_2 \Delta^2 = u(k-1)$$

Si ricavano, così, le seguenti costanti:

$$a_0 = u(k)$$

$$a_1 = (u(k+1) - u(k-1)) / (2 \Delta)$$

$$a_2 = (u(k+1) + u(k-1) - 2 u(k)) / (2 \Delta^2).$$

Pertanto, la parabola $u_1(y)$ è:

$$u_1(y) = \frac{u(k+1) + u(k-1) - 2u(k)}{2\Delta^2} y^2 + \frac{u(k+1) - u(k-1)}{2\Delta} y + u(k) .$$

Le derivate sono:

$$\left[\frac{du_1}{dy} \right]_{y=0} = \frac{u(k+1) - u(k-1)}{2\Delta} \quad (20)$$

$$\left[\frac{d^2 u_1}{dy^2} \right]_{y=0} = \frac{u(k+1) + u(k-1) - 2u(k)}{\Delta^2} . \quad (21)$$

Se, dunque, non si conosce la funzione $u(y)$, ma si conosce il valore della $u(y)$ in alcuni punti (3 nel caso analizzato) si possono calcolare anche le derivate, con un certo errore.

Si sviluppi la $u(y)$ in serie di Taylor nell'intorno di k . Infatti, il valore di una funzione in un punto appartenente ad un intorno può essere individuato una volta che si conosca il valore della funzione insieme con tutte le sue derivate nel centro dell'intorno. Definendo k come centro dell'intorno di ampiezza 2Δ si ha che:

$$u(k+1) = u(k) + \frac{\Delta}{1!} \frac{du}{dy} + \frac{\Delta^2}{2!} \frac{d^2 u}{dy^2} + \frac{\Delta^3}{3!} \frac{d^3 u}{dy^3} + \frac{\Delta^4}{4!} \frac{d^4 u}{dy^4} + \dots \quad (22)$$

$$u(k-1) = u(k) - \frac{\Delta}{1!} \frac{du}{dy} + \frac{\Delta^2}{2!} \frac{d^2 u}{dy^2} - \frac{\Delta^3}{3!} \frac{d^3 u}{dy^3} + \frac{\Delta^4}{4!} \frac{d^4 u}{dy^4} + \dots \quad (23)$$

con le derivate calcolate in k (centro dell'intorno).

Sommando le equazioni (22) e (23) si ottiene:

$$u(k+1) + u(k-1) = 2u(k) + \frac{2}{2!} \Delta^2 \frac{d^2 u}{dy^2} + \frac{2}{4!} \Delta^4 \frac{d^4 u}{dy^4} + \dots \quad (24)$$

mentre sottraendo:

$$u(k+1) - u(k-1) = \frac{2}{1!} \Delta \frac{du}{dy} + \frac{2}{3!} \Delta^3 \frac{d^3 u}{dy^3} + \frac{2}{5!} \Delta^5 \frac{d^5 u}{dy^5} + \dots \quad (25)$$

Dall'equazione (25) si ricava la du/dy :

$$\frac{du}{dy} = \left(\frac{u(k+1) - u(k-1)}{2\Delta} \right) - \frac{\Delta^2}{6} \frac{d^3u}{dy^3} + \dots$$

mentre dalla (24):

$$\frac{d^2u}{dy^2} = \left(\frac{u(k+1) + u(k-1) - 2u(k)}{\Delta^2} \right) - \frac{\Delta^2}{12} \frac{d^4u}{dy^4} + \dots$$

Cioè, tenendo conto delle (20) e (21), si ricava:

$$\frac{d^2u}{dy^2} = \frac{d^2u_1}{dy^2} - \frac{\Delta^2}{12} \frac{d^4u}{dy^4} + \dots$$

$$\frac{du}{dy} = \frac{du_1}{dy} - \frac{\Delta^2}{6} \frac{d^3u}{dy^3} + \dots$$

Alla luce di queste due ultime equazioni, è evidente che è proprio Δ^2 l'indice di errore che si cercava. Più piccolo è il Δ , minore sarà l'errore (legato, tra l'altro a Δ^2 e non a Δ). Si può, quindi, spingere l'errore a valori via via più piccoli, sino a renderlo accettabile, ma questo comporta un aumento delle incognite.

Passando, ora, a condizioni più complesse, ma anche più generali, in cui la velocità è funzione di y e z ($u=f(y,z)$), si introduca un reticolo, quale quello in fig. (12).

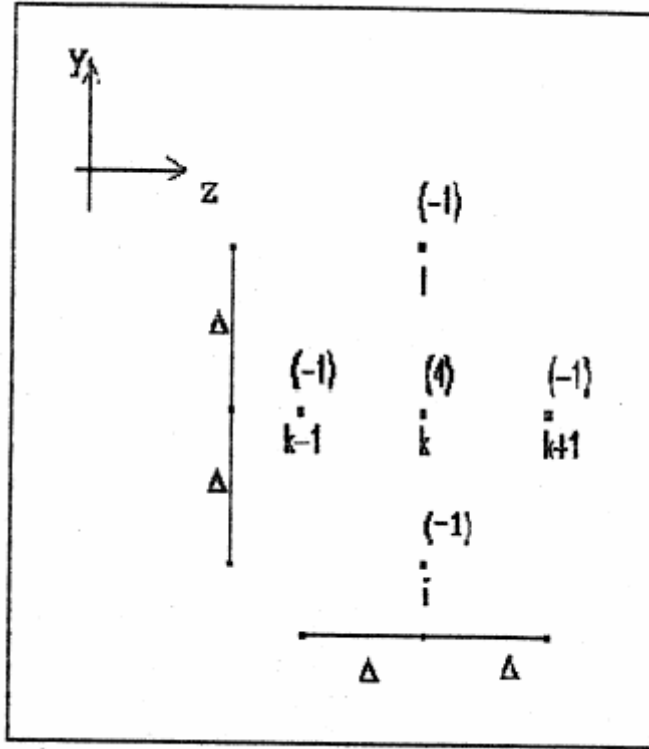


Fig. 12. Reticolo per il generico punto k .

Per calcolare le derivate parziali nel punto k rispetto ad y o z , si faccia riferimento alle formule (20) e (21), ottenendo le seguenti derivate parziali:

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{u(k+1) - u(k-1)}{2\Delta}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{u(k+1) + u(k-1) - 2u(k)}{\Delta^2},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{u(l) - u(i)}{2\Delta}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{u(l) + u(i) - 2u(k)}{\Delta^2}.$$

Alla luce dei precedenti risultati, l'equazione di Poisson:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = -\frac{\gamma J}{\mu}$$

diviene:

$$\frac{u(l) + u(i) - 2u(k)}{\Delta^2} + \frac{u(k+1) + u(k-1) - 2u(k)}{\Delta^2} = -\frac{\gamma J}{\mu}.$$

Facendo riferimento alla cosiddetta cellula di fig. (12), si ottiene la seguente equazione finale, che andrà scritta per ogni punto del reticolo in cui si è suddivisa la sezione da analizzare:

$$4u(k) - (u(k+1) + u(k-1) + u(l) + u(i)) = \frac{\gamma J}{\mu} \Delta^2.$$

Ovviamente, la precedente equazione non andrà scritta per i punti del reticolo appartenenti al contorno, dove è nota la soluzione ($u=0$).

Si dovrà, così, risolvere un sistema lineare, le cui incognite sono i valori puntuali di velocità.

A maggior chiarimento del metodo si riporta una applicazione in Appendice B.

2.8 Considerazioni sulle sezioni diverse da quelle trattate

Per sezioni diverse da quelle ora considerate, il Di Ricco (13) presenta, per la determinazione delle u e quindi delle t_0 , un metodo del tutto generale, che si riconduce in sostanza ad una risoluzione approssimata di un'equazione integrale ottenuta seguendo la via indicata da Neumann e Fredholm. Data la notevole laboriosità del metodo stesso, appare più conveniente, nel tentativo di accennare a qualche altro esempio di soluzione che possa essere utile in pratica, prendere le mosse dalla nota analogia che esiste tra il problema di cui ci si occupa, nell'idrodinamica dei fluidi viscosi, e quello, nel campo dell'elasticità, della torsione pura di un prisma della stessa sezione (Paschoud M. [32], Love H. [26], Timoshenko S. [48]). A titolo puramente indicativo, si ricorda anche un'altra interessante analogia, indicata da Prandtl, che è quella con le sollecitazioni di una membrana sottilissima avente per contorno la sezione considerata. Essa si presta a misure sperimentali impiegando una pellicola saponosa.

Ritornando all'analogia con la torsione, si osserva che, mentre il problema idrodinamico consiste nella soluzione dell'equazione di Poisson con la relativa condizione al contorno, l'analogo problema elastico è rappresentato dall'equazione:

$$\frac{\partial^2 \bar{\phi}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{\phi}}{\partial z^2} = -2G\theta \quad (26)$$

in cui $\bar{\varphi}$ è una funzione degli sforzi, G il modulo di elasticità al taglio θ l'angolo di torsione, con la condizione al contorno $\bar{\varphi} = 0$.

L'equazione (26) si riconduce all'equazione di Laplace:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0 \quad (27)$$

facendo la seguente posizione:

$$\varphi = \bar{\varphi} + \frac{G\theta}{2} (z^2 + y^2) .$$

Per i problemi per cui ci si occupa è possibile ricondursi all'equazione (27), facendo uso delle soluzioni date dal De Saint Venant (12), con la posizione:

$$\varphi = u + \frac{gJ}{4v} (z^2 + y^2) , \quad (28)$$

dovendo valere al contorno la condizione:

$$u = 0 \rightarrow \varphi = \frac{gJ}{4v} (z^2 + y^2) . \quad (29)$$

L'equazione più generale che soddisfa la (28) è del tipo:

$$\begin{aligned} \varphi = & a_0 + a_1 z + a_1' y + a_2 (z^2 - y^2) + a_2' 2zy + a_3 (z^3 - 3zy^2) + a_3' (3z^2 y - y^3) + \\ & + a_4 (z^4 - 6z^2 y^2 + y^4) + a_4' (4z^3 y - 4zy^3) + \dots \end{aligned} \quad (30)$$

restandone determinata, in base alla (29), la forma della curva rappresentante il contorno. Di maggiore interesse sono però le curve simmetriche rispetto agli assi, per le quali si vede che la (30) assume la seguente forma:

$$\varphi = a_0 + a_2 (z^2 - y^2) + a_4 (z^4 - 6z^2 y^2 + y^4) + \dots \quad (31)$$

mentre la corrispondente equazione al contorno è:

$$-\frac{gJ}{4v} (z^2 + y^2) + a_0 + a_2 (z^2 - y^2) + a_4 (z^4 - 6z^2 y^2 + y^4) + \dots = 0 . \quad (32)$$

Trascurando i polinomi superiori al 4° grado e determinando in modo opportuno le costanti, chiamando a e b i semiassi della curva rappresentata, l'equazione (32) assume la seguente forma:

$$\frac{z^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + A \left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2} \right) (z^2 - y^2) - A \frac{z^4 - 6z^2y^2 + y^4}{a^2b^2} = 1 - A$$

dove A è una costante, che può variare tra $b^2/(a^2+b^2)$, nel qual caso la curva ha dei punti multipli, e $-(\sqrt{2}-1)/2$, oltre il quale la curva cessa di essere chiusa.

Il corrispondente valore di u è dato:

$$u = \frac{gJ}{2v} \frac{a^2b^2}{a^2+b^2} \left[(1-A) - \left(\frac{z^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right) - A \frac{a^2-b^2}{a^2b^2} (z^2 - y^2) + \right. \\ \left. + \frac{A}{a^2b^2} (z^4 - 6z^2y^2 + y^4) \right].$$

Il caso in cui $A=0$ corrisponde a quello già esaminato dell'ellisse.

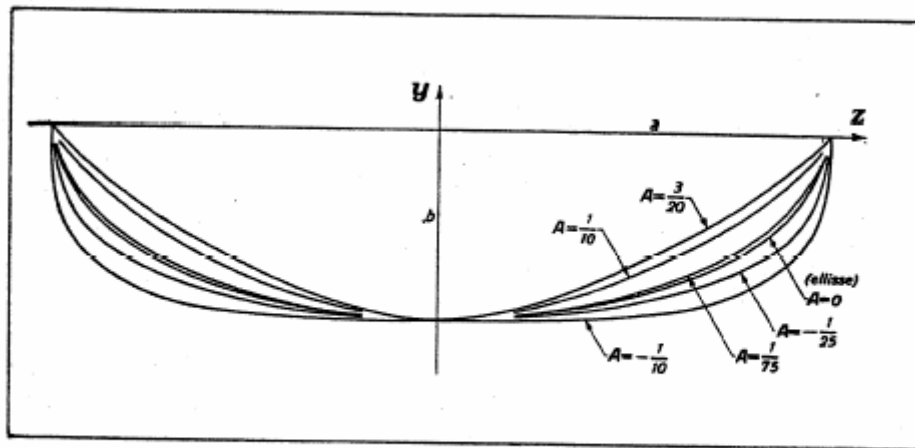


Fig. 13. Alcune forme del contorno per $a/b=2$ e per $-1/9 < A < 1/5$.

Nella fig. (13) sono riprodotte le forme del contorno per un rapporto $a/b=2$, e per alcuni valori di A, compresi fra $+1/5$ e $-1/9$, tenendo presente che per i valori di $A < -b^2/(a^2+5b^2)$ le curve sono, anziché convesse, concave nei vertici, sono cioè circoscritte anziché inscritte nel rettangolo di lati $(2a, 2b)$, riuscendo evidentemente di minor interesse applicativo.

Quando sia, nelle (31) e (32), sempre limitate ai polinomi del 4° grado, $a_2=0$, la curva che rappresenta il contorno:

$$-\frac{gJ}{4v}(z^2+y^2) + a_0 + a_4(z^4 - 6z^2y^2 + y^4) = 0$$

presenta semiassi uguali nelle due direzioni z ed y ($a=b=r$), e può anche scriversi:

$$\frac{z^2+y^2}{r^2} - A' \frac{z^4 - 6z^2y^2 + y^4}{r^4} = 1 - A' \quad (33)$$

mentre la corrispondente distribuzione di velocità è data dalla:

$$u = -\frac{gJ}{4v} \left[(z^2+y^2) - \frac{A'}{r^2} (z^4 - 6z^2y^2 + y^4) - r^2(1+A') \right].$$

Si vede facilmente che, affinché la curva rappresentata dalla (33) sia chiusa, deve aversi $A' < 1$; d'altra parte è sufficiente considerare i valori di A' compresi tra 0 e 0.5, perché l'equazione $B'=1-A'$ muta l'equazione in altra uguale. Per $A'=0$ la curva è una circonferenza di raggio r , e per $A'=0.5$ essa degenera in due iperboli.

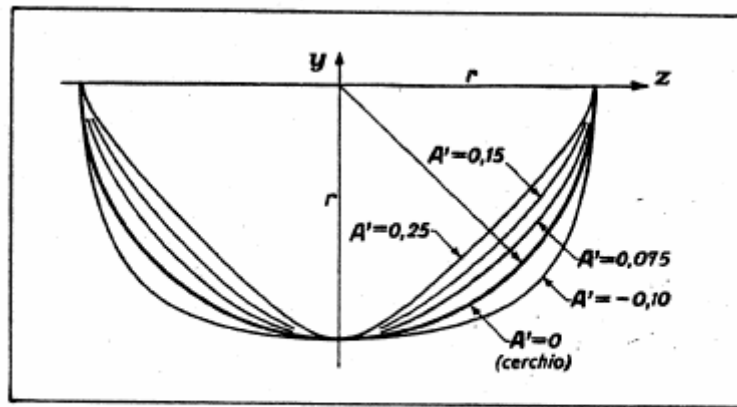


Fig. 14. Alcune forme del contorno per $A' < 0.2643$.

Nella fig. (14) sono riportate alcune curve per valori del parametro A' non superiori a 0.2643; oltre tale valore, esse divengono concave anziché convesse.

Più complicati procedimenti si richiedono quando la forma della sezione sia costituita da un poligono non regolare.

Per ulteriori informazioni al riguardo si può far riferimento al Ghetti [17].

A conclusione di questo paragrafo si può, dunque, ritenere praticamente risolto il problema della determinazione dei diagrammi di velocità, e con esso il problema delle resistenze al moto, per le condizioni di moto uniforme laminare per condotti cilindrici di ogni sezione.

E' comunque importante mettere in evidenza che, in virtù dei potenti mezzi di calcolo di cui oggi si dispone, il metodo delle differenze finite spinto agli elementi finiti può, senz'altro, essere sostitutivo dei metodi con sviluppi in serie. Questi ultimi, tuttavia, conservano una propria rilevanza teorica, ancorché storica.

2.9 Indice di resistenza

Nel moto laminare il legame fra la cadente effettiva e l'altezza generatrice della velocità generatrice della velocità media dipende dalle dimensioni della sezione trasversale della corrente, dalla velocità media, dalla viscosità cinematica del fluido, dalla forma della sezione trasversale, e dalle condizioni cinematiche imposte sul contorno della sezione trasversale stessa. Mediante l'analisi dimensionale, per un condotto cilindrico a sezione generica, si perviene alla relazione $\tau_0 = k(f)\mu V / R$, in cui R è il raggio idraulico, V è la velocità media, k un coefficiente dipendente dalla forma della sezione attraverso il fattore di forma $f \cdot \tau_0$ è lo sforzo alla parete definito dalla relazione $\tau_0 = \gamma R J$.

Assumendo una relazione che lega J a V del tipo:

$$J = \frac{\lambda}{4R} \frac{V^2}{2g} \quad (\text{equazione di Darcy-Weisbach})$$

in cui λ è l'indice di resistenza, per quanto detto nei paragrafi precedenti, per la sezione circolare si giunge alla relazione:

$$\lambda = \frac{64}{Re},$$

Essendo $Re = \frac{\rho v 4R}{\mu}$ il numero di Reynolds.

In generale, invece, si ha:

$$\lambda = \frac{64}{f \cdot Re}$$

dove f , come detto, vale 1 per il caso di sezione circolare. Per le altre sezioni, il coefficiente f , definito come rapporto, valutano a pari numero di Reynolds, fra il λ relativo alla sezione circolare e quello adatto alla sezione effettiva, si discosta dall'unità.

In particolare l'espressione di f per una condotta a sezione anulare è:

$$f = \frac{\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2 + 1 - \frac{\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2 - 1}{\ln \frac{r_2}{r_1}}}{\left(\frac{r_2}{r_1} - 1\right)^2}.$$

In fig. (15) si riporta il diagramma di λ in funzione di Re per la sezione circolare e per le sezioni anulari. In quest'ultimo caso le curve sono parametrizzate in funzione del rapporto r_2/r_1 .

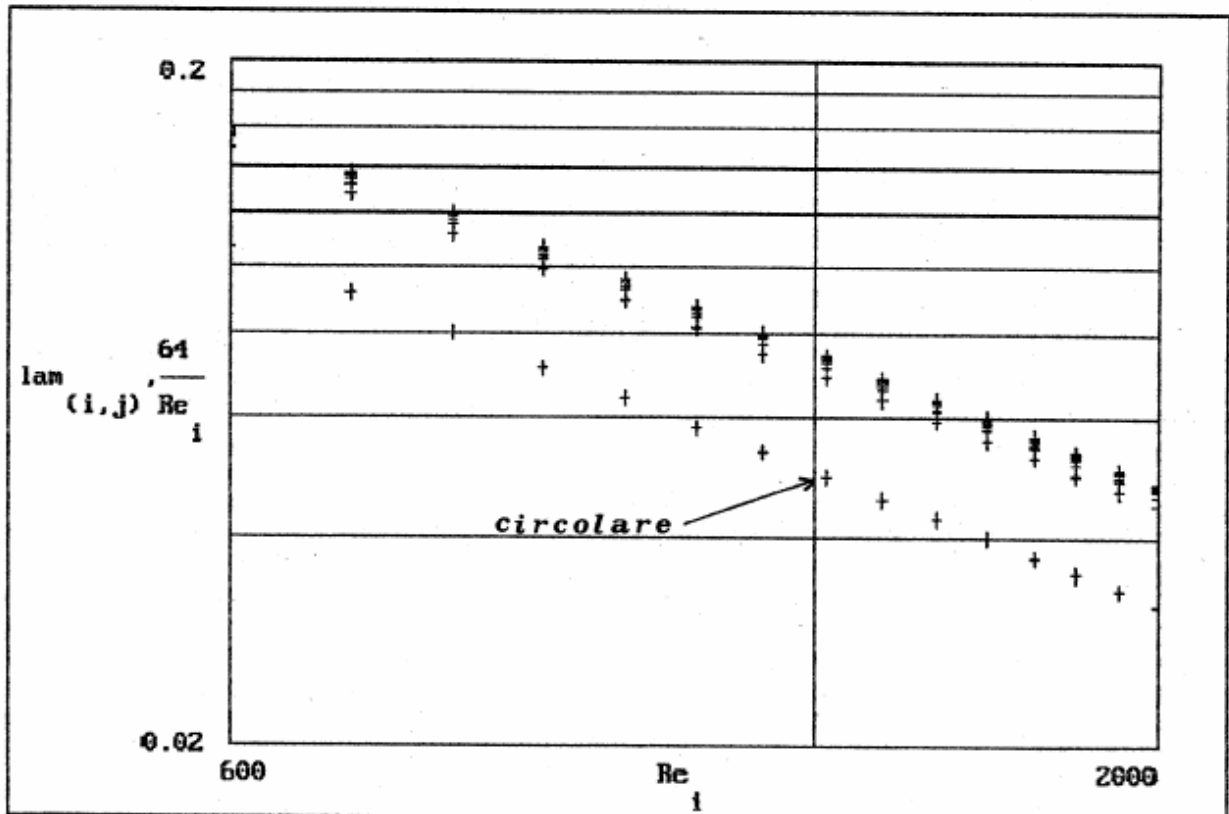


Fig. 15. Il parametro r_2/r_1 varia da 1.11 (curva più alta) a 10 (seconda curva dal basso).

2.10 Principio variazionale del Ghetti

Prima di passare allo studio del moto turbolento, appare interessante mettere in evidenza un principio, enunciato nel 1950 da Augusto Ghetti [17], che, pur nascendo da constatazioni proprie del moto laminare, è estendibile anche al caso del moto turbolento. Questo è anche quanto affermato da E. Marchi ([29]), che richiama esplicitamente il Ghetti.

Il principio si enuncia in questi termini: “in una corrente a regime stabilito si realizza il massimo della portata compatibilmente con le caratteristiche fisiche del moto e con un dato valore della resistenza globale al contorno. Se, pertanto, la distribuzione delle velocità è in qualche relazione con la distribuzione degli sforzi di scorrimento, quest’ultima lungo il contorno dovrà realizzarsi in modo da ottenere, per la prima all’intero della sezione, il massimo valore integrale.”

Così si esprimeva il Ghetti, il quale, tra l’altro aggiungeva che “estrapolando dal campo laminare, a noi pare che questo principio potrebbe essere di guida alle indagini sulla distribuzione delle velocità e degli sforzi di scorrimento anche in altre condizioni del moto”.

Sostanzialmente si afferma che la distribuzione delle tensioni tangenziali al contorno sia tale da realizzare, a parità di valor medio, quella distribuzione di velocità nella sezione che dà luogo alla portata massima.

In formule, se $u = u(u_*, \dots)$ rappresenta la relazione fra la velocità locale e la velocità di attrito

$(u_* = \left((\tau_0 / \rho)^{1/2} \right))$ sul contorno, dev’essere

$$Q = \int_{\Omega} u(u_*, \dots) d\Omega = \text{massimo}$$

compatibilmente con la seguente condizione sul contorno C:

$$\int_C (u_*^2 - \bar{u}_*^2) dC = 0.$$

Sulla base di questo principio variazionale, Ghetti ha dimostrato l’impossibilità, per assurdo, che la relazione $u = u(u_*, \dots)$ in una sezione qualunque sia la stessa valida per la sezione circolare. In

manca di altre relazioni non ha però ulteriormente sviluppato il procedimento. A questo proposito il Ghetti si limita a concludere che “nella ricerca dell’espressione di $u = u(u_*, \dots)$ sembra logico non allontanarsi dai fondamenti delle teorie che hanno dato buona prova nel caso della sezione circolare”.

Ed è con questi criteri informativi che ci si accinge ad affrontare la terza parte di questo lavoro dedicata al moto turbolento.

3 TURBOLENZA

Iniziamo col chiederci “Cos’è la turbolenza?” Nel Twenty-Fifth Wilbur Wright Memorial Lecture intitolata “Turbolenza”, Von Karman (1937) definì la turbolenza come segue:

“La turbolenza è un moto irregolare che in genere fa la sua comparsa nei fluidi, gas o liquidi, quando si muovono vicino a superfici solide o anche quando sono contigui a correnti dello stesso fluido che scorrono vicino o sopra l’altro.”

Questa definizione è accettabile fino ad un certo punto; essa, infatti, non dice abbastanza. Molti flussi irregolari non possono essere considerati turbolenti. Per essere turbolenti, essi devono avere certe proprietà, a livello statistico, di stazionarietà, analoghe a quelle dei fluidi quando considerati su scala molecolare. Hinze (1959) riconobbe la deficienza della definizione di Von Karman e propose la seguente:

“Il moto turbolento è una condizione irregolare di flusso in cui le varie quantità mostrano una variazione casuale (random) nello spazio e nel tempo, sicché possono essere definite statisticamente delle quantità medie.”

Bradshaw sottolineò che, in aggiunta la turbolenza ha un vasto range di lunghezze d’onda. Le tre affermazioni, prese insieme, definiscono adeguatamente la turbolenza.

I primi studi sui flussi turbolenti furono condotti da Hagen (1839). Egli, studiando flussi di acqua in condotti circolari, osservò due diversi tipi di moto, che sono ora noti come laminare e turbolento. Quindici anni più tardi, nel 1854, Hagen pubblicò un secondo lavoro in cui mostrava che la velocità influenzavano i due regimi di moto. Nel suo lavoro egli osservò che la velocità media in un condotto è funzione del diametro e della temperatura dell’acqua. (Naturalmente la temperatura determina il valore di viscosità.) I suoi risultati sono riportati in fig. 16 per diversi diametri di tubi.

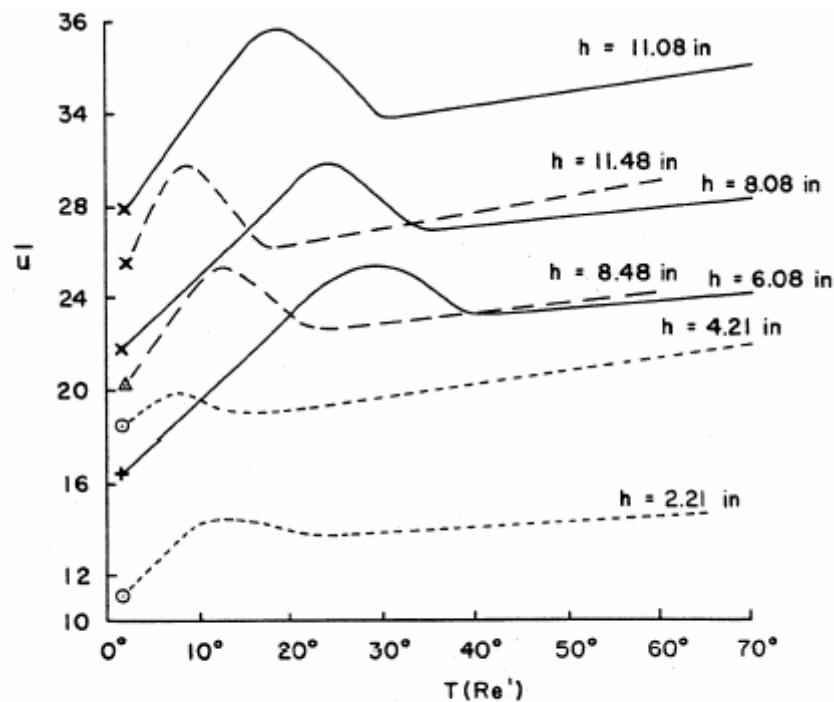


Fig. 16. Relazione tra la velocità media (in Rhineland inches per second) e la temperatura (in gradi Reaumur) per vari diametri di condotta e carichi h (in Rhineland inches). Dati di Hagen (1854).

Circa trent'anni più tardi, Reynolds (1883) introdusse il numero indice che prende il nome da lui, riuscendo a far collassare i dati di Hagen quasi in una singola curva. Nel 1883, in effetti, Reynolds descrisse una serie di osservazioni sperimentali, rimaste classiche nello studio del moto dei fluidi. Un tubo cilindrico e trasparente è attraversato da una portata permanente di acqua limpida. Presso la sezione iniziale del condotto è immesso, inoltre, un getto di acqua colorata. Si osserva che, per piccole portate, il getto si mantiene rettilineo e parallelo all'asse del tubo, e che si conserva integro per lungo tratto prima di essere distrutto dalla diffusione. Questo comportamento evidenzia la condizione di moto laminare. Un aumento successivo della portata, percentualmente modesto, conduce ad un nuovo assetto del moto: dopo breve tratto di condotta, il getto colorato si disintegra, disperdendosi in tutta la massa fluida e conferendo ad essa una colorazione uniforme. In questo stadio, le componenti trasversali di velocità assumono una intensità ed una frequenza particolarmente incisive. Il moto è detto moto turbolento. Il termine turbolento non fu subito usato da Reynolds: l'aggettivo allora usato era sinuoso. Il termine turbolento fu introdotto da Lord Kelvin nel 1887.

Le stesse esperienze di Reynolds, ora ricordate, permettono dunque di fissare un criterio atto ad individuare le condizioni nelle quali ha luogo l'uno o l'altro dei due possibili tipi di moto. Nel tubo cilindrico a sezione circolare, detti ν, V, D , nell'ordine, la viscosità cinematica del fluido, la sua velocità media longitudinale ed il diametro del condotto, il moto si mantiene laminare se

$$Re = \frac{VD}{\nu} \quad (\text{Numero di Reynolds})$$

è minore di circa 2500, risulta invece turbolento se Re supera questo valore.

Un criterio analogo vale per i moti in ambienti con geometria diversa. Cambia, da caso a caso, la dimensione lineare che fissa l'ampiezza del dominio attraversato dal fluido, ma il numero puro Re che ne risulta mantiene la sua efficacia nell'individuare le condizioni di passaggio dal moto laminare al moto turbolento. Il valore numerico di Re in corrispondenza del quale ha luogo la transizione dipende però, oltre che dalla velocità e dalla dimensione lineare adottate per costruirlo, anche dalla particolare geometria dell'ambiente, ivi compresa l'estensione degli eventuali peli liberi.

Il passaggio al moto turbolento avviene per instabilità del moto laminare di partenza. Si è infatti osservato sperimentalmente che è possibile mantenere laminare il moto anche a numeri di Reynolds molto maggiori di quello corrispondente alla transizione usuale, purché si eviti che la corrente venga perturbata da vibrazioni.

Per inquadrare meglio le cause del passaggio sono state condotte anche indagini analitiche, basate prevalentemente sullo schema che segue. Dato un moto laminare, si sovrappone ad esso un insieme di piccole oscillazioni di velocità, sinusoidali nello spazio, e sinusoidali smorzate nel tempo. Si richiede che il moto risultante soddisfi le stesse equazioni valide per il moto di base, ben determinati valori del tasso di smorzamento nel tempo delle oscillazioni inizialmente impresse. Se il tasso di smorzamento risulta positivo, la perturbazione si attenua nel tempo, ed il moto base è stabile, se risulta negativo, la perturbazione, una volta innescata, si esalta progressivamente, ed il moto base è instabile.

Studi di questo genere hanno mostrato che l'instabilità può essere dovuta ai valori assunti dalle accelerazioni degli elementi fluidi.

Per contro, studi dello stesso genere hanno messo in evidenza che l'instabilità è dovuta a volte proprio alla viscosità del fluido. Un esempio è fornito dal moto di un fluido fra due cilindri coassiali in rotazione relativa: l'instabilità è connessa allora ad un travaso di energia meccanica dal moto base a quello di perturbazione, operato proprio dalle azioni viscosi. L'esempio è rilevante perché indica che la viscosità non ha solo effetto di smorzamento del moto attraverso la dissipazione dell'energia meccanica, e quindi che non ha sempre effetto stabilizzante.

3.1 Grandezze cinematiche caratteristiche di un moto turbolento

Nel moto turbolento, i valori locali ed istantanei delle varie grandezze in gioco subiscono fluttuazioni continue e disordinate. Tuttavia una descrizione dei fenomeni così minuta non è utile in campo tecnico: di norma è sufficiente considerare solo le medie temporali dei valori locali ed istantanei, e prescindere dalle oscillazioni sovrapposte.

Allora si potrà definire una velocità di trasporto rigorosamente uguale a :

$$u_{med} = \bar{u} = \lim_{n \rightarrow \infty} (1/n) \sum_{i=1}^n u_i \quad (34)$$

Le componenti turbolente della velocità saranno istantaneamente uguali a u' , v' , e w' (o, rispettivamente, v_x' , v_y' , v_z'), i cui valori medi sono esattamente uguali a zero. Gli scarti quadratici medi di queste grandezze sono chiamati *intensità di turbolenza*. Esse sono spesso espresse in termini relativi attraverso le seguenti quantità:

$$\frac{[(u'^2)_m]^{1/2}}{\bar{u}}, \quad \frac{[(v'^2)_m]^{1/2}}{\bar{u}}, \quad \frac{[(w'^2)_m]^{1/2}}{\bar{u}}.$$

e prendono il nome di *indici di turbolenza*.

Un flusso turbolento stazionario unidirezionale è caratterizzato da una velocità media costante u (con $v = w = 0$) e valori costanti di $(u'^2)_m$, $(v'^2)_m$, $(w'^2)_m$. Per quanto possa essere complesso

conoscere le componenti istantanee di velocità, si possono definire delle grandezze medie, tra l'altro di maggiore interesse da un punto di vista pratico. Si ricorda, tra queste, il *livello di turbolenza* σ .

$$\sigma = \frac{1}{\bar{u}} \sqrt{\frac{(u'^2)_m + (v'^2)_m + (w'^2)_m}{3}} \quad (35)$$

La turbolenza, inoltre, è definita isotropia quando di $(u'^2)_m = (v'^2)_m = (w'^2)_m$.

La quantità σ è in relazione con l'energia cinetica della turbolenza. Si consideri, a tal riguardo, un flusso caratterizzato da velocità media di trasporto $u \neq 0$ e $v=w=0$. Il vettore velocità istantanea può essere così rappresentato:

$$\vec{V} = (\bar{u} + u') \vec{i} + v' \vec{j} + w' \vec{k}.$$

Sicché l'energia cinetica istantanea per unità di massa è:

$$\frac{1}{2} [(\bar{u} + u')^2 + v'^2 + w'^2],$$

e l'energia cinetica media per unità di massa è:

$$\frac{1}{2} \bar{u}^2.$$

Per ottenere l'energia cinetica della turbolenza, si dovrà sottrarre l'energia cinetica media dall'energia cinetica istantanea, ottenendo:

$$\frac{1}{2} (2u'\bar{u} + u'^2 + v'^2 + w'^2).$$

Si definisce, pertanto, energia cinetica media della turbolenza la media della quantità sovrastante, ossia:

$$E = \frac{1}{2} [(u'^2)_m + (v'^2)_m + (w'^2)_m].$$

Per l'equazione (35) si potrà anche scrivere:

$$E = \frac{3}{2} \overline{u^2} \sigma^2.$$

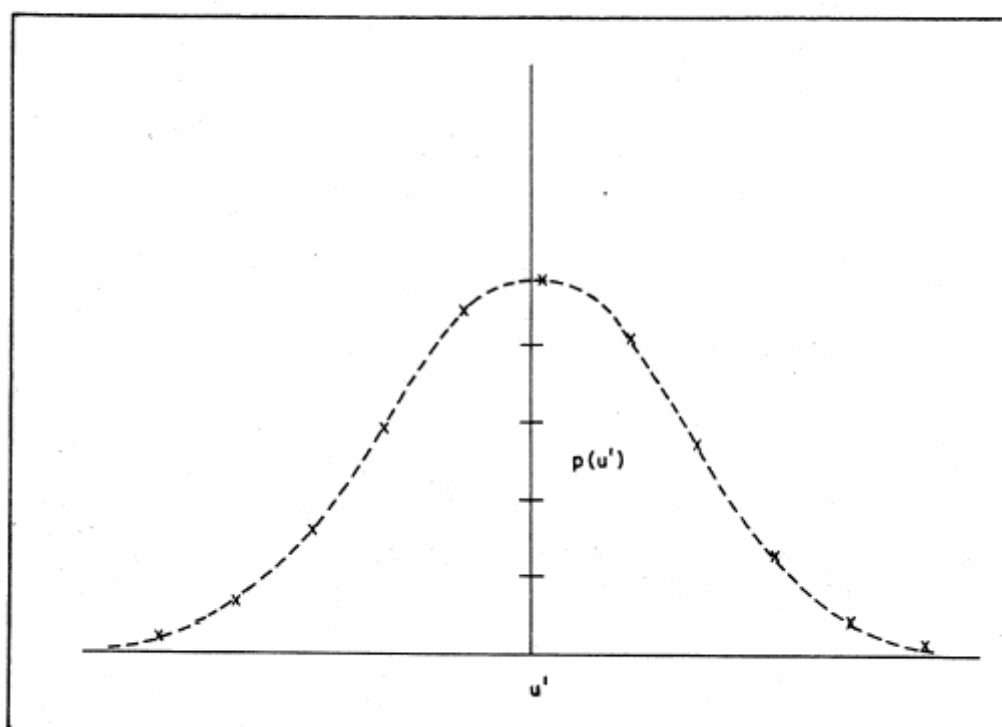


Fig. 17. Funzione densità di probabilità di u' . Da Batchelor (1953).

Si consideri una distribuzione di componenti turbolente di velocità. Ci si chiede se esse sono all'incirca le stesse o se presentano un range di variabilità particolarmente ampio. Molti studi al riguardo hanno messo in evidenza una considerevole variazione delle componenti turbolente di velocità. Inoltre, secondo Batchelor [2] la distribuzione di velocità è molto vicina a quella gaussiana, mostrato in fig. (17).

In effetti altri studi [47] hanno messo in evidenza che è sempre rispettata la distribuzione gaussiana in forma normale. In funzione dell'anisotropia o isotropia si possono avere valori di kurtosis e skewness non normali. La distribuzione gaussiana normale si ha per turbolenza isotropa.

3.2 Moto medio

Le operazioni di media eseguite nel paragrafo precedente sulle velocità, vanno eseguite su tutte le altre grandezze locali ed istantanee di natura meccanica o termodinamica. Tra l'altro, le quantità

medie possono essere ricavate facendo riferimento, anziché ad un intervallo infinito di tempo, ad un intervallo finito di tempo, ad un intervallo finito di durata T . Il valore di T può variare in dipendenza del tipo di moto in esame.

In pratica, dato un *processo casuale a energia finita*, si tratta di valutare per quanto tempo si deve registrare un fenomeno per non perderne i contenuti. A questo scopo, fissando l'attenzione sulla componente della velocità lungo l'asse del condotto, si può effettuare un'acquisizione di dati per un tempo abbastanza lungo. Successivamente si calcola la media e lo scarto quadratico medio di un intervallo di tempo t_1 . Si ripetono i calcoli prendendo in considerazione intervalli di tempo sempre maggiori di t_1 , andando a diagrammare i nuovi risultati. Se il fenomeno è casuale, si nota che i valori della media e dello scarto quadratico medio, all'aumentare dell'intervallo di tempo, tendono ad un valore costante. Al tempo T in cui ciò accade, si può ritenere che siano state prese tutte le informazioni sul fenomeno in studio. Questo tempo T può essere definito, sia pur impropriamente, come il periodo di turbolenza del fenomeno.

3.3 Equazioni meccaniche del moto medio

Alla luce di quanto letto nel precedente paragrafo, lo studio di un moto medio necessita di equazioni indefinite in cui siano presenti valori medi delle grandezze in gioco. In particolare si analizza la *prima equazione indefinita del moto medio*:

$$\rho \vec{F} - \text{div}(\mathbf{T}) = \rho \frac{D\vec{v}}{Dt}.$$

In base alla definizione dei valori medi temporali, il termine a sinistra della precedente equazione diviene:

$$\frac{1}{T} \int_t^{t+T} (\rho \vec{F} - \text{div}(\mathbf{T})) dt = \rho_m \vec{F}_m - \text{div}(\mathbf{T}_m).$$

Se, al secondo membro, si aggiunge al termine $\rho D\mathbf{v}/Dt$, la quantità:

$$\vec{v} \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{v}) \right]$$

ovviamente nulla per la continuità, si ottiene:

$$\begin{aligned} \rho \frac{D\vec{v}}{Dt} &= \rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \rho \vec{v} \cdot \text{grad}(\vec{v}) + \vec{v} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{v} \cdot \text{div}(\rho \vec{v}) = \\ &= \frac{\partial(\rho \vec{v})}{\partial t} + \sum_{i,k=1}^3 \bar{I}_k \left[(\rho v_i) \frac{\partial v_k}{\partial x_i} + v_k \frac{\partial(\rho v_i)}{\partial x_i} \right] = \frac{\partial(\rho \vec{v})}{\partial t} + \sum_{i,k=1}^3 \bar{I}_k \frac{\partial(\rho v_i v_k)}{\partial x_i} \end{aligned}$$

Esprimendo le velocità mediante le loro componenti medie e turbolente, ed eseguendo la media temporale dei vari termini, si può ricavare:

$$\frac{1}{T} \int_t^{t+T} \rho \frac{D\vec{v}}{Dt} dt = \rho_m \frac{D\vec{v}_m}{Dt} + \sum_{i,k=1}^3 \bar{I}_k \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho v'_i v'_k)_m.$$

Introducendo il tensore $(T_R)_m$, definito da:

$$(T_R)_m \equiv \begin{bmatrix} (\rho v'_x v'_x)_m & (\rho v'_x v'_y)_m & (\rho v'_x v'_z)_m \\ (\rho v'_y v'_x)_m & (\rho v'_y v'_y)_m & (\rho v'_y v'_z)_m \\ (\rho v'_z v'_x)_m & (\rho v'_z v'_y)_m & (\rho v'_z v'_z)_m \end{bmatrix}$$

la prima equazione indefinita del moto medio si può scrivere nella forma:

$$\rho_m \vec{F}_m - \text{div}((T)_m) - \text{div}((T_R)_m) = \rho_m \frac{D\vec{v}_m}{Dt}. \quad (36)$$

nota come equazione di Reynolds.

La (36) evidenzia che per il moto medio sussiste un'equazione formalmente analoga a quella già trovata per il moto effettivo, purché si aggiunga alla media temporale del tensore T , cioè $(T)_m$, il tensore degli sforzi di Reynolds, $(T_R)_m$.

Si osserva che il tensore di Reynolds è simmetrico, pertanto la sua aggiunta al tensore $(T)_m$ simmetrico, produce un tensore ancora simmetrico. Pertanto, il tensore degli sforzi complessivi soddisfa la *seconda equazione indefinita per il moto medio*:

$$[(T)_m + (T_R)_m]_{ik} = [(T)_m + (T_R)_m]_{ki}.$$

3.4 Concetto di strato limite e condizioni di ingresso in condotta

L'aderenza di un fluido ad una parete solida causa una distorsione del campo di moto, inizialmente supposto irrotazionale (cioè caratterizzato da un campo di moto $\mathbf{v}$ con $\mathbf{w} = \text{rot}(\mathbf{v}) = 0$). Questa distorsione è inizialmente concentrata alla parete e porta a valori non più nulli della vorticità $\mathbf{w} = \text{rot}(\mathbf{v})$. Una volta generata presso la parete, la vorticità si diffonde successivamente nella massa fluida, nell'ambito di uno strato definito strato limite. Potrà così avvenire rotazionale o che la vorticità rimanga confinata presso la parete. Una situazione di questo tipo si realizza al momento dell'ingresso del fluido in condotta, dove ha inizio lo sviluppo dello strato limite cosiddetto laminare. Questo, nel caso di moto laminare nella tubazione, si sviluppa interessando l'intera condotta e conservando sempre le sue caratteristiche di strato limite laminare.

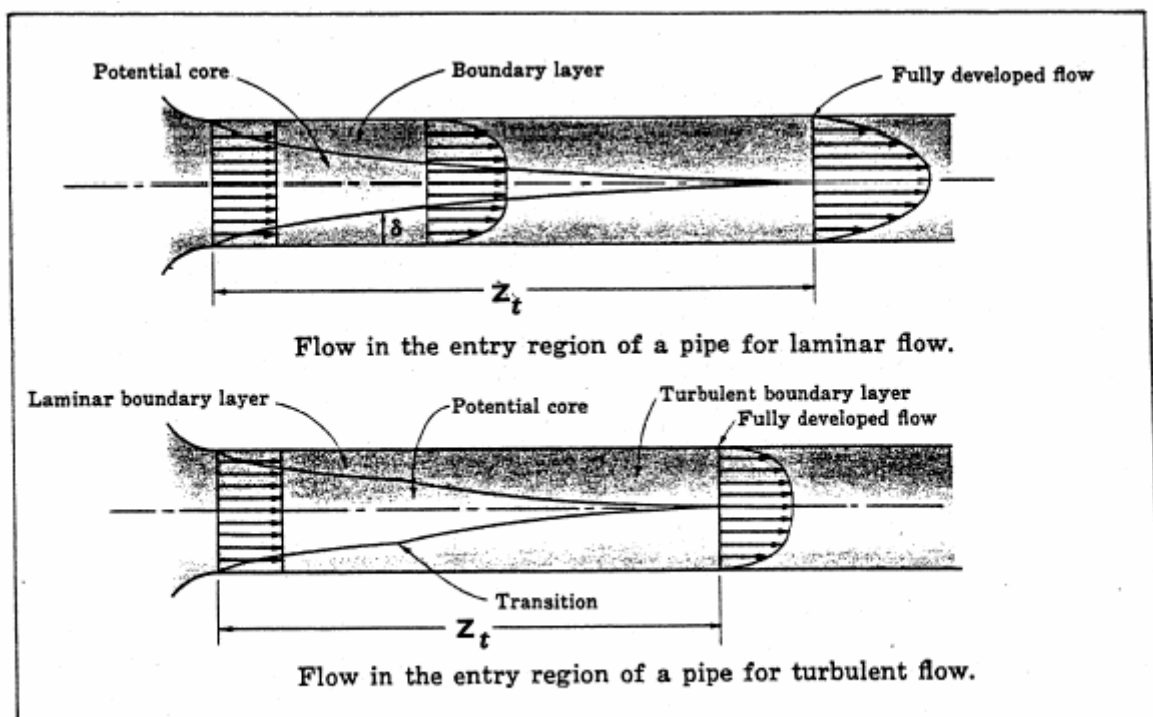


Fig. 18. Condizioni di ingresso in condotta.

La situazione è ben rappresentata dalla fig. 18. Si analizza, dapprima, il caso di flusso *laminare completamente sviluppato*. Dalla fig. 18 si nota che inizialmente il flusso ha un comportamento a potenziale. Andando oltre, questa regione di profilo a velocità costante, talvolta denominata *core* (cioè anima, nucleo), si contrae a causa degli effetti viscosi che si estendono sempre più in profondità nel flusso. Infine, si realizza un flusso laminare completamente sviluppato, per il quale sono valide le formule riportate nei paragrafi precedenti, diverse in funzione della sezione trasversale del condotto. Boussinesq f il primo a realizzare un'indagine teorica in questa regione del flusso. Usando il concetto di sviluppo dello strato limite, egli constatò che la lunghezza della zona di transizione (dall'ingresso al flusso completamente sviluppato), z_T , può essere determinata con la relazione:

$$z_T = 0.03 \cdot Re \cdot D,$$

che, come è stato successivamente costatato, è in buon accordo con i dati sperimentali.

Se, invece, le condizioni di completo sviluppo di un flusso in condotta presuppongono l'instaurarsi di un moto turbolento, all'ingresso in condotta si avrà uno sviluppo di uno strato limite laminare, che lascerà successivamente il posto ad uno strato limite turbolento. Quest'ultimo tuttavia non si sviluppa fino in prossimità della parete, dove invece permane un substrato di spessore estremamente ridotto, entro il quale il moto è ancora dominato dalle tensioni viscosi. Non c'è una relazione di carattere generale, tipo quella di Boussinesq per moto laminare, per determinare la lunghezza della zona di transizione nel caso turbolento.

Infatti, in quest'ultimo caso, il fenomeno dipende dalle condizioni cinematiche locali. Tra l'altro, risono parecchi modi per definire il punto di inizio di un flusso completamente sviluppato. Per esempio, si potrebbe definire un flusso completamente sviluppato sulla base delle perdite di carico, della distribuzione di velocità o delle grandezze turbolente. Le lunghezze della zona di transizione, definite in funzione di ciascuna delle precedenti grandezze, sono sostanzialmente differenti. Il gradiente di pressione richiede, generalmente, per un completo sviluppo, una lunghezza di transizione da 3 a 4 volte il diametro. La velocità media richiede da 30 a 60 volte il diametro, prima

di divenire completamente sviluppata. E le grandezze turbolente richiedono una lunghezza molto più grande. In pratica, il criterio per stabilire il punto di inizio di un flusso completamente sviluppato potrebbe essere il grado di variazione di tutte le grandezze medie: partendo dal punto di imbocco del fluido in condotto, si perverrà ad un punto oltre il quale il grado di variazione si annullerà. Comunque il criterio proposto più frequentemente in letteratura è quello di definire il punto oltre il quale non cambiano i profili di velocità media.

La regione di transizione non è quella di un flusso parallelo in senso stretto, poiché le linee di corrente avranno una curvatura lungo l'interfaccia tra il core e lo strato limite. Quindi non si possono, in maniera rigorosa, applicare i risultati che discendono dalla limitazione di flusso parallelo. Comunque, nella maggior parte dei problemi, la regione di transizione ha una lunghezza limitata se confrontata con quella del condotto in cui è presente un flusso completamente sviluppato. Spesso, pertanto, le varie grandezze sono calcolate facendo l'ipotesi che l'intero condotto sia interessato da un flusso laminare o turbolento completamente sviluppato. Per ulteriori informazioni si può far riferimento al testoni Hughes-Brington [18].

3.5 Caso di condotto a sezione circolare

Si faccia riferimento alla fig. (19), che mostra la sezione di un condotto circolare, in cui scorre un fluido in condizioni di moto uniforme turbolento completamente sviluppato.

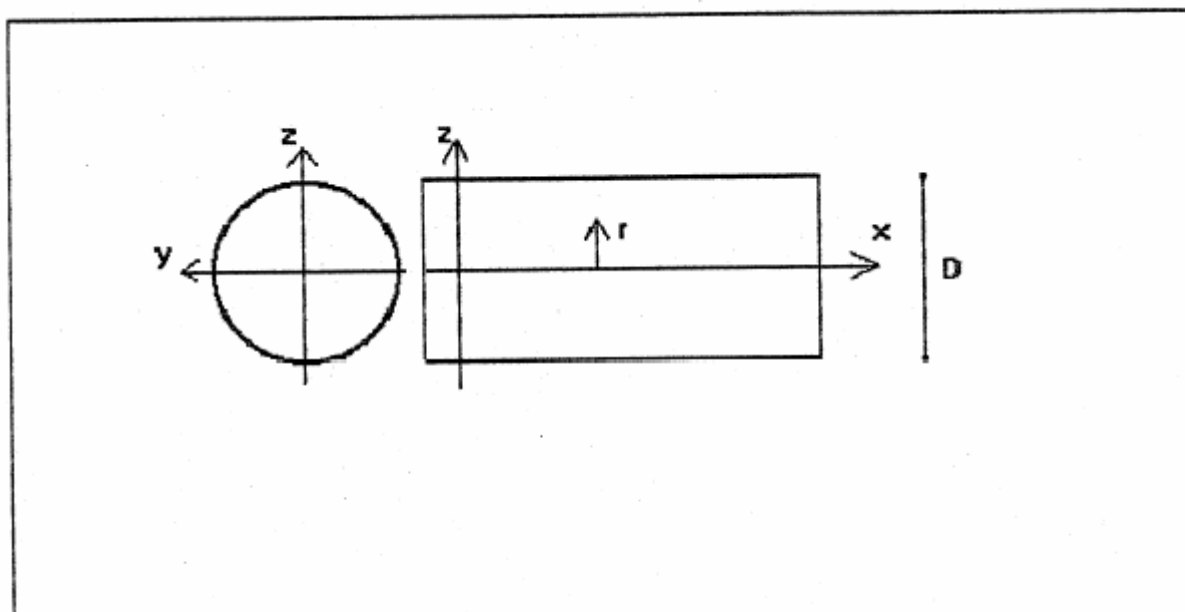


Fig. 19. Sezioni trasversale e longitudinale di un condotto.

Si vuole determinare il diagramma di velocità. La proiezione dell'equazione (36) sull'asse x diviene, a conti fatti:

$$-\frac{\partial}{\partial x}(\rho g \zeta + p) + \mu \nabla^2 (v_x)_m - \left(\frac{\partial(\rho v'_z v'_x)_m}{\partial z} + \frac{\partial(\rho v'_y v'_x)_m}{\partial y} + \frac{\partial(\rho v'_x v'_x)_m}{\partial x} \right) = 0$$

Passando dalle coordinate cartesiane alle coordinate cilindriche, si ottiene:

$$\gamma J + \mu \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(\frac{r d(v_x)_m}{dr} \right) \right] - \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r (\rho v'_r v'_x)_m) = 0,$$

ossia:

$$d \left(r \frac{d(v_x)_m}{dr} \right) = \frac{1}{\mu} d (r (\rho v'_r v'_x)_m) - \frac{\gamma J r}{\mu} dr. \quad (37)$$

Integrando la (37) si ottiene:

$$r \frac{d(v_x)_m}{dr} = \frac{1}{\mu} r (\rho v'_r v'_x)_m - \frac{\gamma J}{\mu} \frac{r^2}{2} + C_1. \quad (38)$$

Per la condizione di massimo di velocità in corrispondenza dell'asse del condotto, $d(v_x)_m/dr=0$, risulta $C_1=0$.

Pertanto, la (38) diviene:

$$d(v_x)_m = \frac{1}{\mu} (\rho v'_r v'_x)_m dr - \frac{\gamma J}{2\mu} r dr. \quad (39)$$

Integrando la (39) tra $D/2$ ed r , essendo D il diametro del condotto ed r la generica posizione radiale, si ottiene:

$$(v_x)_m = \frac{\gamma J}{4\mu} \left(\frac{D^2}{4} - r^2 \right) - \int_r^{D/2} \frac{(\rho v'_r v'_x)_m}{\mu} dr. \quad (40)$$

In confronto, dell'equazione (40) con la corrispondente equazione per il moto laminare, mette in evidenza che nel moto turbolento si hanno ovunque velocità minori di quelle che, a parità di cadente J e proprietà fisiche del fluido, si verificherebbero nello stesso condotto in caso di moto laminare.

Per quanto attiene lo stato tensionale, si ottiene:

$$\tau_{rx} = \gamma \frac{r}{2} J = -\mu \frac{d(v_x)_m}{dr} + (\rho v'_x v'_r)_m$$

ossia la tensione varia linearmente col raggio, essendo nulla in corrispondenza dell'asse e massima a contatto con la parete.

L'applicazione dell'equazione di Reynolds, al caso semplice esaminato, mostra la pratica impossibilità di determinare una legge di velocità come nel caso laminare, e, dunque, la necessità di far riferimento alle indicazioni sperimentali peraltro ormai abbondanti per il caso di moto in condotto circolare. Prima, però, si analizza l'intera problematica della ricerca delle leggi velocità.

3.6 Diagrammi di velocità nel moto turbolento. Possibili vie di studio².

Si indicano, ora, delle metodologie di studio che possono consentire di risolvere il problema della definizione dei diagrammi di velocità, e quindi delle resistenze al moto, nel caso di flusso turbolento.

1) Teoria del trasporto della quantità di moto. [1] [41] [37]

² Nel seguito si farà a meno di indicare col pedice m o col soprassegno le principali variabili medie.

Reynolds e Prandtl, per analogia con la teoria cinetica dei gas, formularono questa teoria. Prandtl formulò l'ipotesi del *percorso di mescolamento turbolento*: essa suppone che singole particelle fluide piccole, ma conservanti ancora il carattere della continuità, possano descrivere brevi percorsi in mezzo al fluido circostante senza perdere la propria individualità e mantenendo immutata la propria quantità di moto, prima di dissolvere se stesse nel fluido ambiente, giungendo con esso ad una uguaglianza di velocità e quindi di quantità di moto. Ai risultati di questa teoria si possono fare due critiche fondamentali: a) i gradienti di velocità al centro del tubo avrebbero valori diversi da zero, contro l'ipotesi che ivi la velocità è massima; b) la lunghezza di mescolamento varia in effetti, dalle pareti al centro del tubo con legge alquanto più complessa di quanto presupposto nella teoria.

2) Teoria del trasporto della vorticità. [46]

Questa teoria, proposta dal Taylor parallelamente a quella del Prandtl, ha dei meriti che sono stati autorevolmente riconosciuti dal Von Karman. Essa, però, non sembra dia luogo ad una maggiore delle risultanze teoriche con quelle sperimentali, realizzando una maggiore complicazione formale. Anche in questa teoria compare la lunghezza di mescolamento l , definita, però, come il percorso nel quale le particelle conservano costante la vorticità (invece della quantità di moto), dove per vorticità di un campo di moto $\mathbf{v}$ si intende $\mathbf{w} = \text{rot}(\mathbf{v})$.

3) Teoria statistica della turbolenza. [53]

Un approccio statistico al problema pare che, sinora, abbia consentito lo studio del movimento a sforzo tangenziale costante attraverso il fluido, come nel caso di deflusso tra due pareti in movimento relativo.

4) Nuove teorie. [24]

In questo gruppo si può annoverare la cosiddetta teoria del mesolayer di cui ci si occuperà nel seguito. Alla luce di così tanti indirizzi di studio, che potrebbero far apparire ancora incerto e confuso il discorso sui diagrammi di velocità, appare senz'altro propizio il commento di E. Marchi

(29), che dichiara: “Vi è la tendenza attualmente da parte di diversi AA. di considerare ormai superate le teorie della lunghezza di mescolamento. Non ci sentiamo di accettare, in linea generale, tale giudizio negativo. Se è vero, infatti, che queste teorie non sono di aiuto per approfondire l’indagine sul fenomeno della turbolenza di parete, non si può certo dire che esse abbiano perso importanza nei confronti della interpretazione delle leggi di distribuzione delle velocità medie locali e delle leggi di resistenza (cioè di quelle ricerche per le quali erano state effettivamente proposte). Ciò non esclude che il significato fisico di una “lunghezza di mescolamento”, definita in sostanza dall’analisi dimensionale, sia per lo meno discutibile. Ma poi pensiamo che oggi si possa astrarre dal significato della lunghezza di mescolamento e considerare piuttosto le teorie di Prandtl e Von Karman come schemi fondati sulle osservazioni sperimentali, che, senza entrare nel meccanismo delle fluttuazioni di velocità legate alla turbolenza, ne interpretano gli effetti sulla distribuzione delle componenti medie di trasporto e la loro relazione con gli sforzi di scorrimento al contorno (....)”.

3.7 Viscosità turbolenta e lunghezza di mescolamento

Boussinesq [6] fu il primo ad affrontare il problema di trovare un modello per le tensioni tangenziali turbolente con l’introduzione del concetto di viscosità turbolenta. Egli fece l’assunzione che gli sforzi tangenziali turbolenti agiscano come gli sforzi viscosi, il che implica che gli sforzi turbolenti siano proporzionali al gradiente di velocità. Il coefficiente di proporzionalità fu chiamato viscosità turbolenta e fu definito come segue:

$$-\rho (u'v')_m = \rho \epsilon_m \frac{\partial u}{\partial y} . \quad (41)$$

Nella precedente espressione, ϵ_m , come la viscosità cinematica ν , si assume essere il prodotto di una lunghezza per una velocità, cioè:

$$\epsilon_m \propto \text{lunghezza} \times \text{velocità}.$$

Resterebbe da definire, a questo punto, quale lunghezza e quale velocità devono essere prese in considerazione. Secondo la teoria cinetica dei gas (Kennard [20]), la viscosità cinetica ν è data da:

$$\nu = 0.499 \bar{c} \lambda,$$

dove $\bar{c}$ è la velocità media molecolare e λ è il percorso medio libero. La precedente equazione mette in evidenza che nel flusso turbolento porzioni macroscopiche di fluido si muovono come un unico elemento, con un moto che è prossimo a quello di molecole libere di gas. Questi agglomerati di fluido (cosiddetti eddies, ossia vortici) perdono la loro individualità dopo un breve tempo, ma se ne creano continuamente dei nuovi. La distanza effettiva che percorrono in direzione trasversale è chiamata lunghezza di mescolamento l , e la velocità con cui si muovono relativamente al fluido che li circonda è dell'ordine della componente turbolenta della velocità lungo y . Pertanto $\epsilon_m = \nu' l$.

Al fine di ottenere una formula più generale, Prandtl propose il suo ben noto teorema della lunghezza di mescolamento, secondo il quale le tensioni turbolente possono essere così calcolate:

$$-\rho (u'v')_m = \rho l^2 \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right| \frac{\partial u}{\partial y}. \quad (42)$$

L'equazione (42) insieme con l'equazione (41) consentono di scrivere la seguente relazione tra la viscosità turbolenta e la lunghezza di mescolamento:

$$\epsilon_m = l^2 \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right|.$$

Nelle figg. 20 e 21 si mostrano le assunzioni per la distribuzione della viscosità turbolenta e della lunghezza di mescolamento per strato limite su piastra piana (Klebanoff [21]). I risultati mostrati in queste figure indicano che nella regione $0 < y/\delta < 0.15 \div 0.20$ la

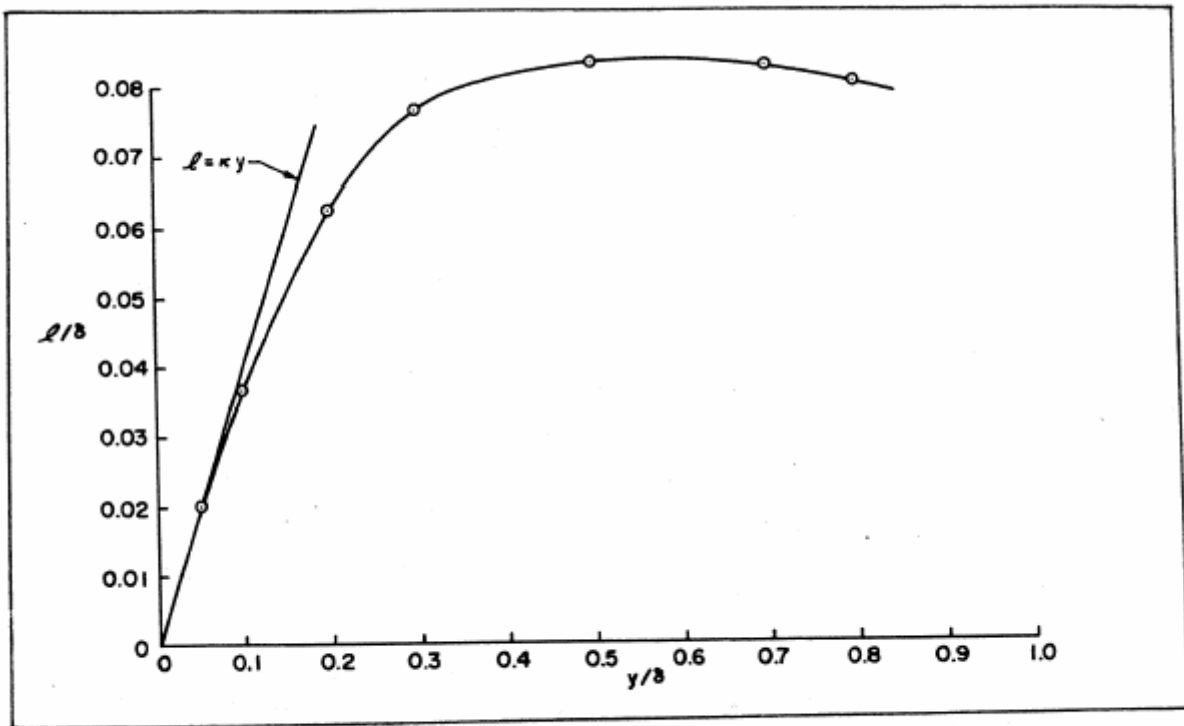


Fig. 20. Distribuzione della lunghezza di mescolamento adimensionalizzata per strato limite turbolento a gradiente di pressione nullo. Dati di Klebanoff (1954).

viscosità turbolenta e la lunghezza di mescolamento

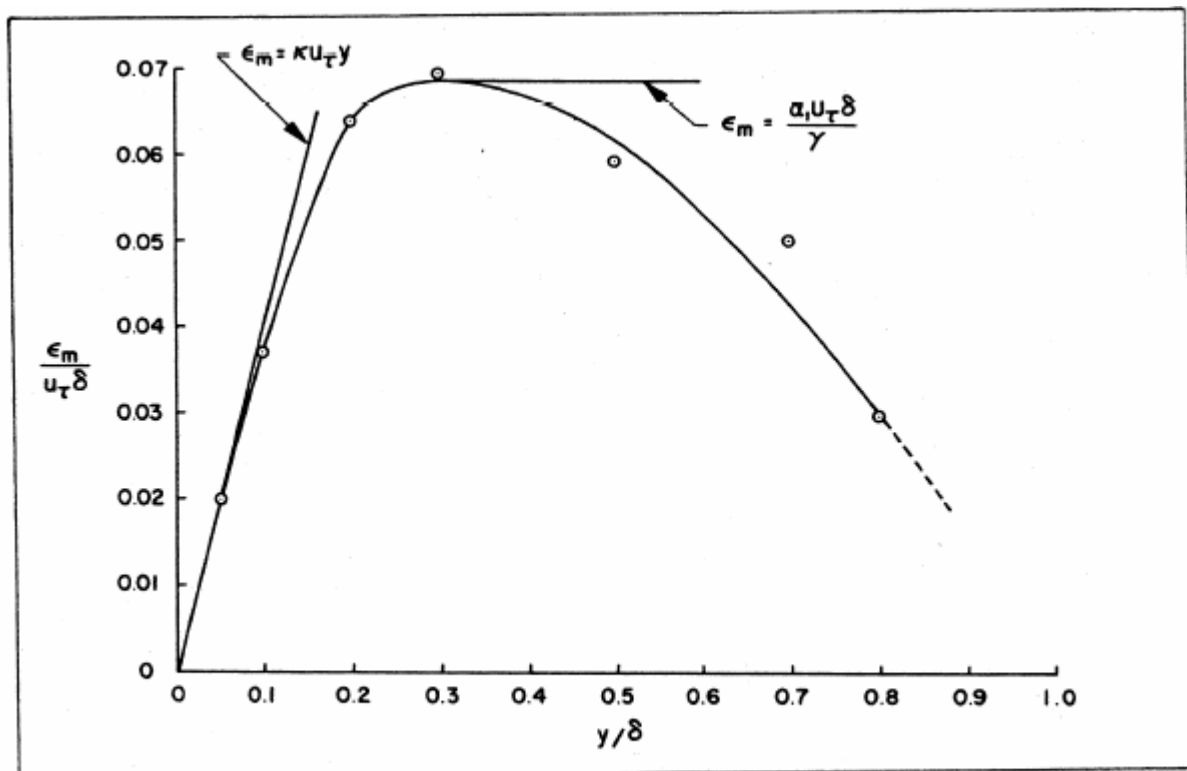


Fig. 21. Distribuzione della viscosità turbolenta adimensionalizzata per strato limite turbolento a gradiente di pressione nullo. Dati di Klebanoff (1954).

variano linearmente con la distanza y dalla parete. Di fatto, dunque, in questa regione la viscosità turbolenta e la lunghezza di mescolamento possono essere approssimate come:

$$\epsilon_m = k u_* y,$$

$$l = ky,$$

dove k è una costante empirica, nota come costante di Von Karman, sperimentalmente posta uguale a $0.40 \div 0.41$.

Per valori di $y/\delta > 0.20$, la viscosità turbolenta inizia a decrescere lentamente, mentre la lunghezza di mescolamento rimane approssimativamente costante.

3.8 Concetto e calcolo di scala di turbolenza

Si faccia riferimento alla fig. 22, che mostra i valori istantanei di velocità in un punto di uno strato limite turbolento. Si supponga di considerare i valori di

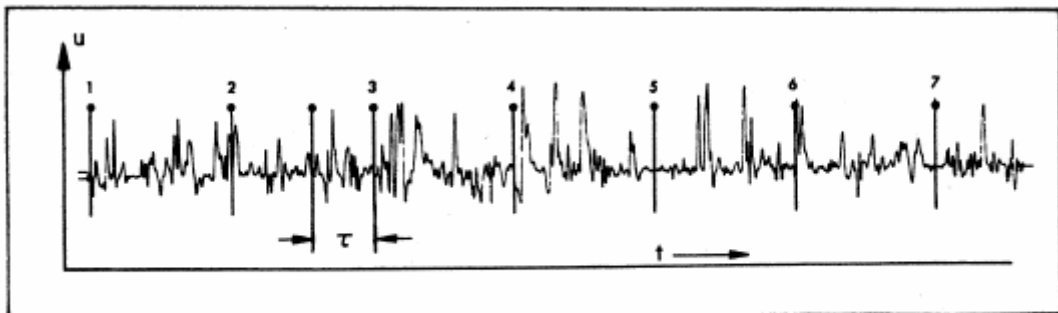


Fig. 22. Valori di velocità in funzione del tempo.

velocità negli istanti 1,2,3,, n in figura e i valori di velocità relativi agli stessi istanti decrementati di τ . Si calcoli poi la seguente quantità:

$$(u'(t) u'(t-\tau))_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n u'_i(t) u'_i(t-\tau). \quad (43)$$

L'equazione (43) rappresenta una funzione di autocorrelazione. In problemi del tipo che si stanno considerando, la quantità definita dall'equazione (43) converge ad un'unica funzione di τ indipendente da t per ogni particolare flusso turbolento stazionario. Se $\tau \Rightarrow 0$, la funzione diviene $(u'(t)u'(t))_m$ o $(u'^2)_m$. Questa quantità può essere convenientemente introdotta a scopo di normalizzazione in modo da formare il coefficiente di correlazione temporale Euleriano:

$$R_E(\tau) = \frac{(u'(t) u'(t-\tau))_m}{(u'(t) u'(t))_m}.$$

Un tipico andamento della funzione R_e è mostrato in fig. (23). La curvatura al vertice è determinata dai vortici

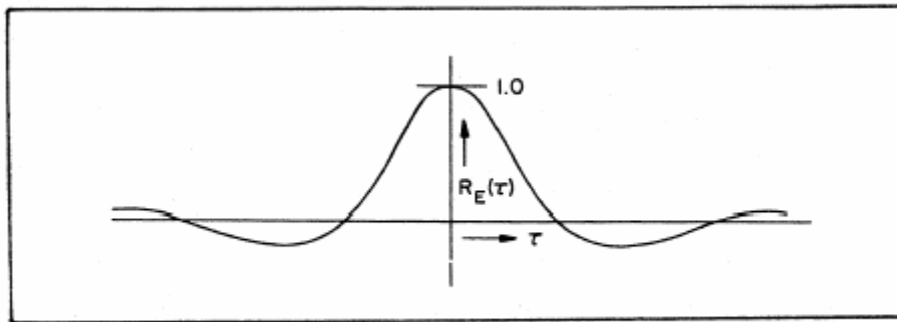


Fig. 23. Tipico andamento di una funzione di correlazione.

(eddies) più piccoli. Pertanto, facendo riferimento alla fig. (24), l'intercetta con l'asse delle ascisse della parabola osculatrice nel vertice fornisce una misura dei più piccoli eddies; questa intercetta è indicata come λ_g ed è numericamente uguale a:

$$\frac{1}{\lambda_g^2} = -\frac{1}{2} \left(\frac{d^2 g}{dy^2} \right)_0.$$

La lunghezza λ_g è nota come *microscala della turbolenza*.

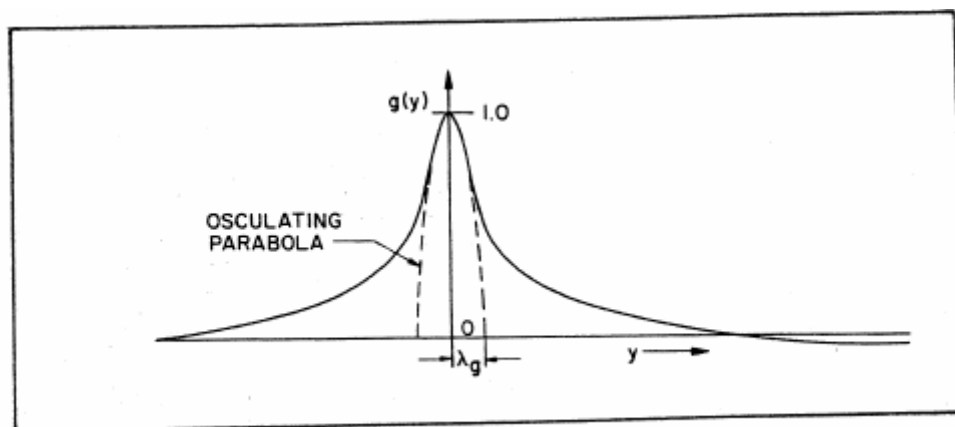


Fig. 24. Determinazione della microscala di turbolenza.

Essendo, poi, la curva normalizzata, ed essendo, dunque, $g=1$ per $y=0$, una seconda grandezza interessante è l'area al di sotto di metà della curva, area che si indicherà con Λ_g :

$$\Lambda_g = \int_0^{\infty} g(y) dy.$$

Quest'area rappresenta una misura approssimata delle dimensioni dei più grandi eddies. Per ovvie ragioni, essa è chiamata scala integrale.

3.9 Spessore dello spostamento e spessore della quantità di moto

Due importanti parametri, per i problemi di cui ci si occupa, sono lo spessore di spostamento δ^* (*displacement thickness*) e lo spessore della quantità di moto θ (*momentum thickness*). Poiché nel seguito si farà uso di

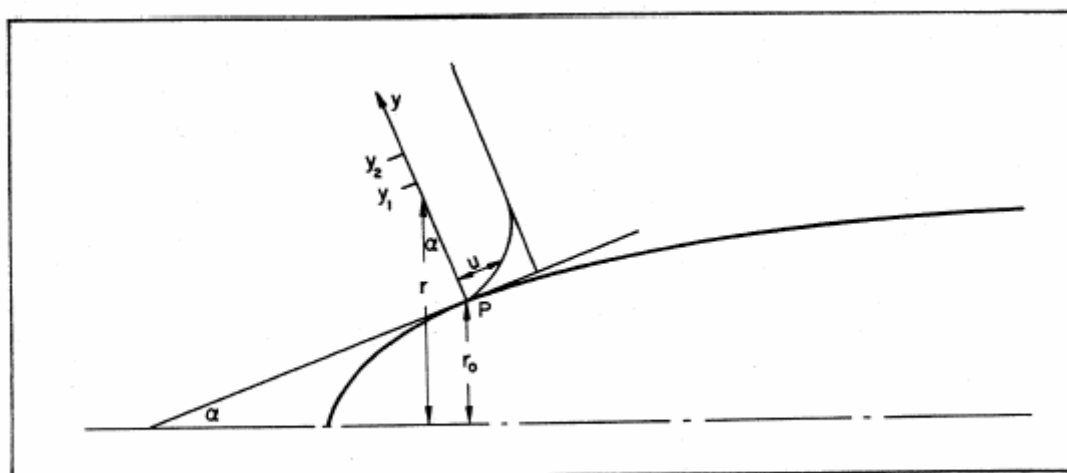


Fig. 25. Schema di analisi per strato limite lungo un solido di rivoluzione.

queste grandezze, appare opportuno darne ora una breve definizione.

Si faccia riferimento alla fig. (25), che illustra uno strato limite intorno ad un corpo solido di rivoluzione.

Si indichi con u_e il valore della velocità al bordo esterno dello strato limite (cioè della corrente irrotazionale). Si introduce il concetto di spessore di spostamento, δ^* , definito dalla seguente posizione:

$$\delta^* = \frac{1}{u_e} \int_0^{\infty} (u_e - u) dy. \quad (44)$$

Il prodotto della distanza δ^* per u_e risulta pari al difetto di portata che esiste tra $y=0$ e $y=\infty$ a causa dell'esistenza dello strato limite.

Analogamente, la grandezza θ , calcolabile come viene indicato di seguito:

$$\theta = \frac{1}{u_e^2} \int_0^{\infty} (u_e - u) u dy, \quad (45)$$

definisce lo spessore della quantità di moto.

Il prodotto $\rho \theta u_e$ rappresenta il difetto di quantità di moto della massa fluida, all'ascissa x , a causa dell'esistenza dello strato limite.

Per ulteriori informazioni si può far riferimento al testo di M. Viti [52], o, per una trattazione più dettagliata, a Cebeci-Smith [7].

3.10 Strati limiti in equilibrio

Alla luce delle precedenti constatazioni si può dare una esatta definizione di *strati limiti in equilibrio*. Gli strati limiti in equilibrio costituiscono una classe di strati limiti in cui la distribuzione di velocità è caratterizzata da un valore costante del parametro:

$$\beta = \frac{\delta^*}{\tau_0} \frac{dp}{dx}, \quad (46)$$

che rappresenta il rapporto tra le forze di pressione taglienti in una sezione dello strato limite. Questi flussi sono chiamati di equilibrio o autoconservanti (self-preserving).

Un flusso a gradiente di pressione nullo è un caso particolare di uno strato limite in equilibrio, in cui la (46) è costantemente nulla.

Nel seguito si farà sostanzialmente riferimento a strati limiti in equilibrio.

3.11 Natura composta dello strato limite turbolento.

Secondo dati sperimentali uno strato limite turbolento può essere visto approssimativamente come uno strato composito costituito da una *inner region* ed una *outer region*. La ragione di identificare due regioni in uno strato limite turbolento, secondo Cebeci-Smith [7], è legata all'impossibilità di ottenere dei profili di velocità in funzione di uno stesso parametro dimensionale. Questa non è l'unica motivazione posta in essere dai due Autori. Infatti, facendo riferimento ad un'esperienza

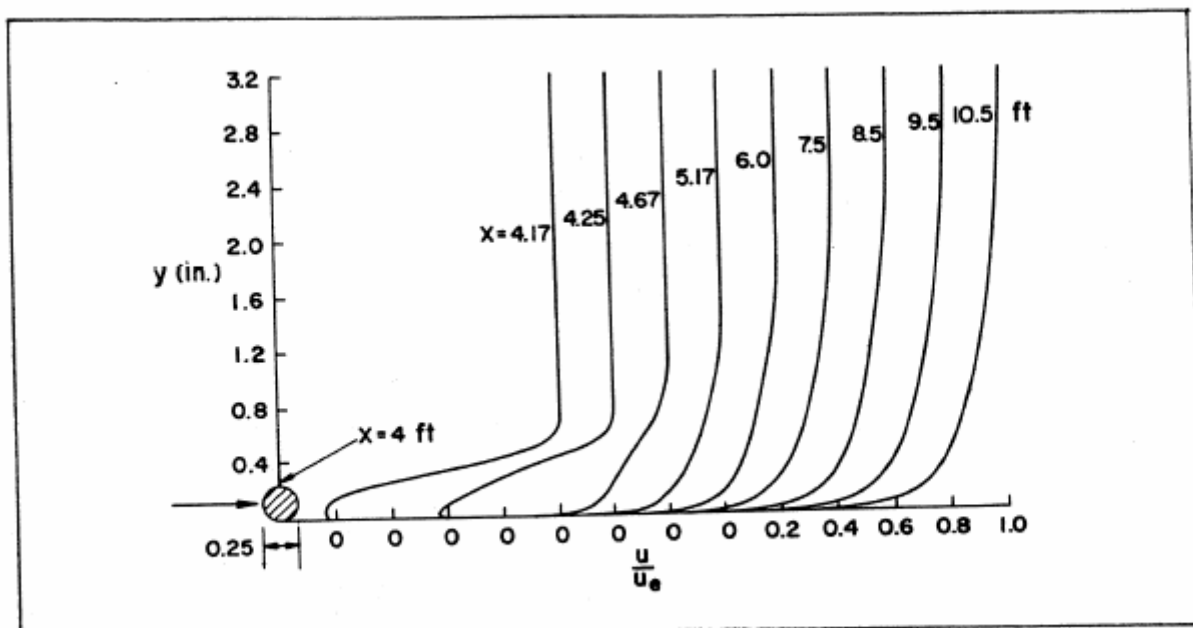


Fig. 26. Risposta di uno strato limite turbolento ai disturbi di parete. Si riporta la distribuzione delle velocità medie. Dati di Klebanoff e Diehl (1952).

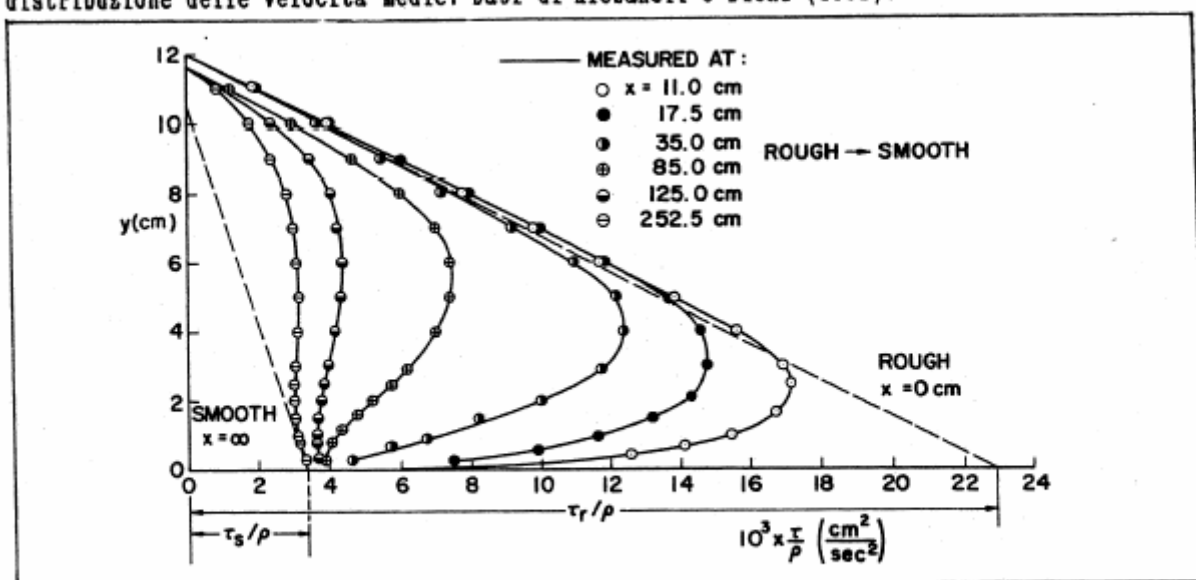


Fig. 27. Variazione della distribuzione delle tensioni tangenziali in un canale rettangolare per passaggio da superficie scabra a superficie liscia. Dati di Jacobs (1939).

di Klebanoff e Diehl [22] (si veda la fig. (26)), se si pone un ostacolo in uno strato limite turbolento di un fluido su piastra piana, i profili di velocità risentiranno ovviamente dell'ostacolo stesso.

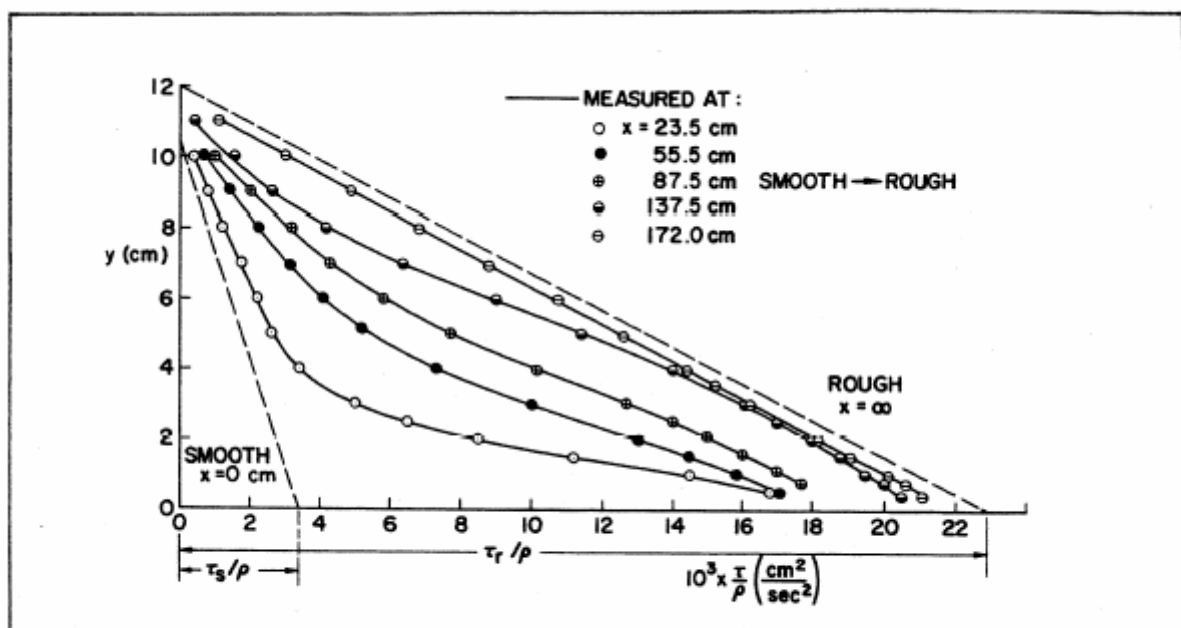


Fig. 28. Variazione della distribuzione delle tensioni tangenziali in un canale rettangolare per passaggio da superficie liscia a superficie scabra. Dati di Jacobs (1939).

L'analisi della fig. 26 mostra che la inner part dello strato turbolento ritorna alle condizioni "normali" più velocemente della outer part, il che mostra che il flusso vicino alla parete è alquanto insensibile alle condizioni lantane della parete. Le esperienze di Jacobs [19], illustrate nelle figg. (27) e (28), mettono ulteriormente in evidenza questa situazione. In queste figure si mostra un flusso turbolento, in un canale rettangolare, che passa da superficie scabra a superficie liscia e viceversa. E' possibile notare che in entrambi i casi le tensioni tangenziali vicino alla parete assumono il nuovo valore, corrispondente alle condizioni locali di superficie, mentre, in punti lontani della parete, le tensioni tangenziali si modificano più lontano.

Secondo gli Autori citati, da questi esperimenti si può trarre una conclusione generale: è fondamentalmente impossibile descrivere un flusso nell'intero strato limite turbolento in termini di un singolo set di parametri. Ossia è necessario trattare uno strato limite turbolento come uno strato composito costituito da una inner region e una outer region.

La inner region di uno strato limite turbolento ha uno spessore molto più piccolo dell'outer region: questo spessore si aggira intorno al 10÷20% del totale. Generalmente si assume che la distribuzione di velocità media in questa regione sia completamente determinata dalla tensione di parete τ_0 , dalla

densità ρ , dalla viscosità dinamica μ e dalla distanza dalla parete y , attraverso un'espressione di questo tipo nota come legge di parete:

$$u^+ = \frac{u}{u_*} = \Phi_1(y^+) \quad (47)$$

dove u_* è la velocità di attrito già definita, mentre $y^+ = (yu_*)/\nu$ è un numero di Reynolds e, in quanto tale, una quantità adimensionale.

A sua volta, la inner region può essere suddivisa in tre substrati come rappresentato in fig. (29): 1) substrato viscoso, 2) regione di transizione (buffer layer), 3) regione di completa turbolenza

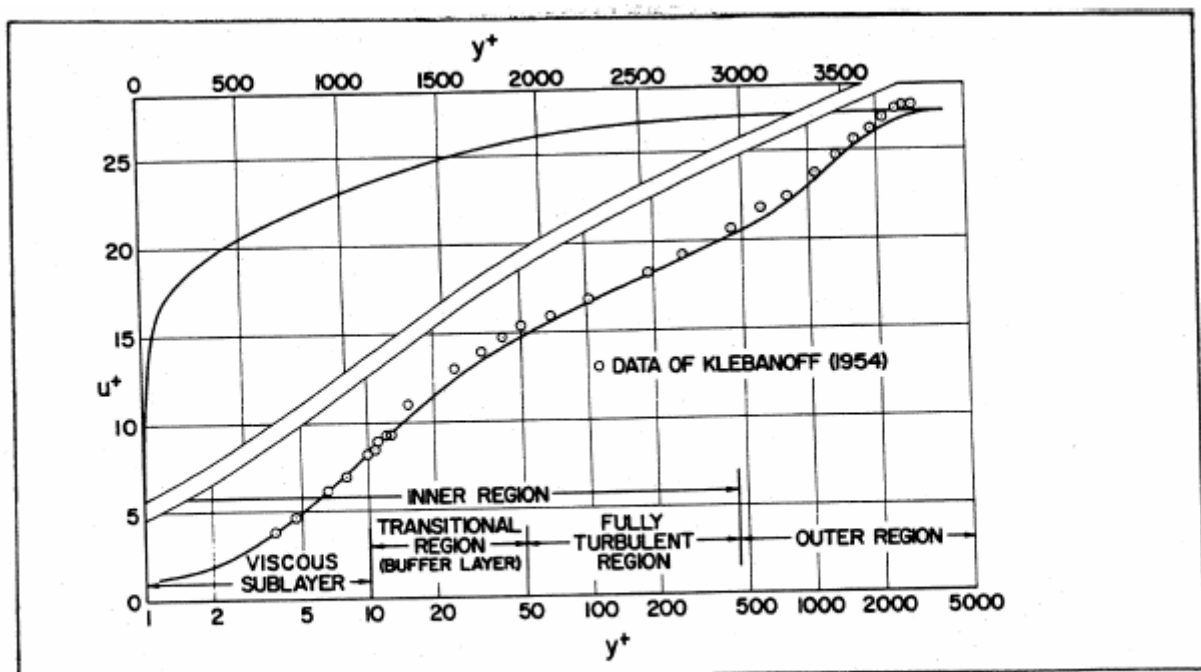


Fig. 29. Diagrammi lineare e semilogaritmico della distribuzione di velocità media in uno stato limite turbolento a gradiente di pressione nullo.

Il substrato viscoso non mantiene in effetti uno spessore uniforme né nel tempo né lungo la direzione x del moto, ma è possibile individuare uno spessore medio y_s che soddisfa la condizione

$(y_s)^+ = y_s u_* / \nu = 11.5$. Nel substrato viscoso le tensioni sono principalmente di natura viscosa.

Per $y > y_s$ l'effetto della viscosità sul flusso decresce con l'aumentare della distanza dalla parete, per raggiungere, infine, una regione dove le tensioni sono principalmente di natura turbolenta.

La regione intermedia, dove la tensione totale è parte viscosa e parte turbolenta, è chiamata regione di transizione. Se si indica la distanza media della parete al di là della quale il flusso è completamente turbolento con y_t , il campo della regione di transizione è delimitato da $y_s < y < y_t$.

In generale gli spessori del substrato viscoso e della regione di transizione sono piccoli in confronto con lo spessore della regione completamente turbolenta, come mostrato in fig. (29).

L'outer region di uno strato limite turbolento rappresenta l'80÷90% dello spessore δ dell'intero strato limite. Dapprima Darcy, come citato da Durand [15], e molto più tardi Von Karman [54] proposero, per la descrizione delle velocità medie nell'outer region, un'espressione nota come *legge del difetto di velocità*:

$$\frac{U-u}{u_*} = f\left(\frac{y}{\delta}\right),$$

in cui ovviamente per y che approssima δ , la funzione $f(y/\delta)$ tende a zero. E' importante accennare che, per strati limiti su piastre piane, la funzione f è numericamente diversa da quella per flussi in condotti, a causa principalmente del pelo libero. Essa è anche fortemente influenzata dal gradiente di pressione lungo l'asse x di moto del fluido, per cui salvo che per particolari gradienti di pressione lungo x (si ricorda il caso di gradiente di pressione lungo x uguale a zero), f dipende da x stesso.

3.12 Distribuzioni di velocità medie in fluidi incomprimibili su superfici lisce.

Si presentano le leggi di distribuzione di velocità che fanno riferimento a quanto descritto nel paragrafo 3.11 sulla natura composita dello strato limite turbolento.

3.12.1 Substrato viscoso

Il substrato viscoso si estende approssimativamente fino a valori di $y^+ = 11.5$ (si veda nella fig. (29)).

La distribuzione della velocità media può essere ottenuta osservando che in una zona così vicina alla parete si può considerare costante l'andamento delle tensioni totali, date dalla somma delle

tensioni viscosi e di quelle turbolente. Queste ultime, poi, sono rigorosamente uguali a zero in corrispondenza della parete ($y=0$). In sostanza si può ritenere valida la seguente relazione:

$$\nu \frac{du}{dy} - (u'v')_m = \frac{\tau}{\rho} \approx \frac{\tau_0}{\rho} = u_*^2. \quad (48)$$

D'altronde, l'equazione (48) per il caso di substrato viscoso può essere ulteriormente semplificata nella seguente:

$$\nu \frac{du}{dy} = u_*^2. \quad (49)$$

poiché $(u'v')_m=0$ per $y=0$, ma tende a 0 in tutto il substrato limite viscoso.

Integrando l'equazione (49), si ottiene:

$$\frac{u}{u_*} = \frac{yu_*}{\nu}, \quad (50)$$

che, introducendo i termini adimensionali $u^+ = u/u_*$ e $y^+ = yu_*/\nu$, viene sinteticamente rappresentata come:

$$u^+ = y^+. \quad (51)$$

La relazione (51), valida per $y^+ < 11.5$ (fig. (29)), mette in evidenza un andamento lineare delle velocità in tutto il substrato limite viscoso.

3.12.2 Zona completamente turbolenta della inner region

Nella zona della inner region in cui la turbolenza ha un effetto preponderante rispetto alla viscosità, si può trascurare la tensione viscosa rispetto a quella turbolenta. Secondo gli studi di Schubauer (43), questa situazione è verificata approssimativamente quando $y^+ > 30$.

Potendo essere ancora considerata valida l'equazione (48), essa, alla luce delle precedenti constatazioni, dà luogo alla seguente relazione:

$$\frac{\tau_t}{\rho} = - (u'v')_m = u_*^2. \quad (52)$$

essendo τ_t la tensione turbolenta.

Sostituendo l'equazione (42) nell'equazione (52) e usando la relazione della viscosità turbolenta $\epsilon_m = k u_* y$ si ottiene:

$$k u_* y \frac{du}{dy} = u_*^2. \quad (53)$$

L'integrazione dell'equazione (53) porta a:

$$u^* = \frac{1}{k} \ln y^* + c, \quad (54)$$

dove c è una costante il cui valore è normalmente compreso tra 4.9 e 5.5.

Esistono altri modi di ottenere la stessa equazione (54), in particolare come propone il Rotta [40], senza usare il concetto stesso della lunghezza di mescolamento.

Normalmente, l'equazione (54) è definita come equazione logaritmica di parete di Prandtl-Von Karman, poiché nasce dal già citato concetto della lunghezza di mescolamento introdotto da Prandtl e, come si vedrà nel seguito, venne integrata dal fisico matematico Von Karman per ottenere una ben nota legge di resistenza per il moto uniforme turbolento in condotti circolari lisci.

La legge logaritmica (54), se applicata a flussi in condotta, si presta ad alcune obiezioni: in particolare, per i flussi in condotti, si osservano variazioni degli andamenti sperimentali di velocità all'asse.

A riguardo di una possibile applicazione delle leggi di velocità, ricavate per strani limiti, ai flussi in condotta, si osserva che, se ivi scorre un flusso completamente sviluppato, non esiste un ben definito spessore di strato limite o un flusso a potenziale, cioè non si ripetono tutte le situazioni proprie di uno strato limite ideale. Ciononostante, le leggi ricavate per strati limiti, e, dunque, teoricamente e rigorosamente valide per questi, si possono applicare ai flussi in condotta ma con talune limitazioni. In questi casi, sarà l'esperienza di laboratorio a dare un verdetto definitivo sulla validità di certe espressioni.

A conclusione di questo paragrafo, si accenna ad una legge alternativa a quella logaritmica, usata spesso nel passato: si tratta della *legge di potenza*. Essa è ricavabile dalle formule di resistenza di Blasius [5] per tubi lisci. La sua espressione è la seguente:

$$\frac{u}{u_*} = C \left(\frac{u_* y}{\nu} \right)^{\frac{m}{2-m}},$$

dove $C=8.74$, $m=1/4$ per i numeri indici di Reynolds compresi tra 3000 e 70000. Per valori più alti del numero indice di Reynolds, il termine m tende a decrementare (42).

3.12.3 Zona di transizione (*buffer layer*) della inner region

Nella zona di transizione, entrambe le componenti della tensione tangenziale totale, ossia la tensione viscosa e la tensione turbolenta, sono importanti. Si ricorda che la teoria della lunghezza di mescolamento del Prandtl e il concetto di viscosità turbolenta di Boussinesq, nella loro forma originaria, si applicano a flussi in cui è preponderante la tensione turbolenta. Pertanto, è sicuramente più complesso definire una legge per una zona dove tensioni turbolente e tensioni viscosi sono comparabili. Delle molte proposte, una ha raccolto un certo successo: si tratta dell'espressione di Van Driest [49]. Egli assume la seguente legge modificata della lunghezza di mescolamento di Prandtl:

$$l = ky [1 - \exp(-\frac{y}{A})], \quad (55)$$

dove A è una costante di smorzamento della lunghezza di mescolamento definita come $26\nu/(\tau_0\rho)^{-1/2}$. Nell'equazione (55), A è riferita allo strato limite turbolento di fluido incomparabile, con gradiente di pressione trascurabile e trasferimento di massa nullo.

Utilizzando il teorema della lunghezza di mescolamento di Prandtl nella forma espressa dall'equazione (42) insieme con l'equazione (55), si ottiene:

$$u^* = \int_0^{y^*} \frac{2}{b + [b^2 + 4a(y^*)]^{1/2}} dy^*, \quad (56)$$

avendo fatto le seguenti posizioni:

$$a(y^+) = (ky^+)^2 [1 - \exp(-\frac{y^+}{A^+})]^2, A^+ = 26, b = 1.$$

In effetti, l'equazione (56) definisce una distribuzione continua di velocità nella inner region dello strato limite turbolento e si può applicare al substrato viscoso e alla zona prevalentemente turbolenta della inner region, oltre che, ovviamente nella zona di transizione della inner region, per la quale è stata ricavata. Infatti, se si pone $a=0$, l'equazione (56) si riduce alla (51) propria del substrato viscoso; mentre, se si pone $b=0$ a $a=(ky^+)^2$, l'equazione (56) si riduce alla (54) con $c=5.24$. Nella fig. (30) si nota come la distribuzione di velocità, calcolata tramite la (56), si

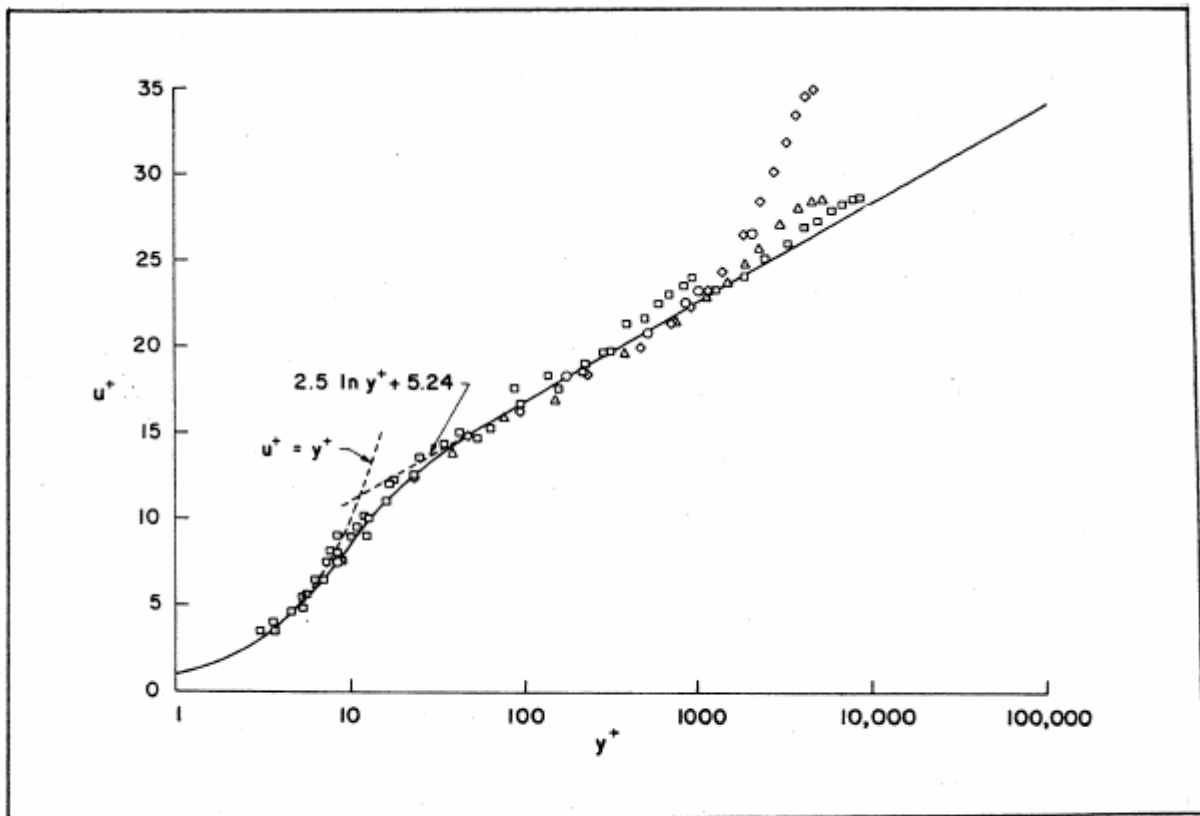


Fig. 30. Distribuzione di velocità medie nella inner region calcolata tramite l'equazione (56).

accorda bene con i dati sperimentali di Laufer (1954) (□), Klebanoff (1954) (○) e Wiegardt (1944) (Δ).

3.12.4 Outer region

Nell'outer region le tensioni tangenziali viscosi sono abbastanza piccole rispetto a quelle turbolente, e possono, dunque, essere trascurate.

La considerazione precedente insieme con l'assunzione di considerare, nella outer region, una viscosità turbolenta indipendente da y (si indichi questa con ϵ_0), consente di scrivere, a conti fatti, la seguente equazione del momento della quantità di moto:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} (\epsilon_0 \frac{\partial u}{\partial y}) = \epsilon_0 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

Si constata che la precedente equazione è identica all'equazione dello strato limite laminare ((28)) se si sostituisce alla viscosità cinematica turbolenta ϵ_0 la viscosità cinematica molecolare ν .

Il fatto che l'equazione della quantità di moto per l'outer region di uno strato turbolento sia simile a quella dello strato limite laminare, consente di ottenere preziose informazioni sulla distribuzione di velocità

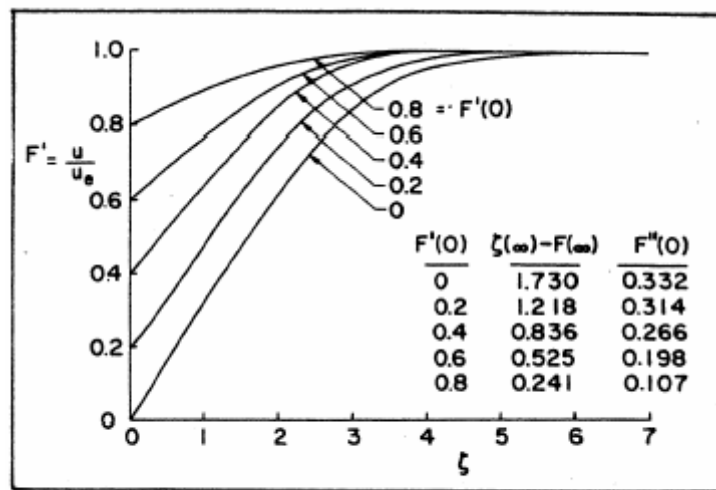


Fig. 31. Diagramma di velocità u/u_e in funzione di ζ .

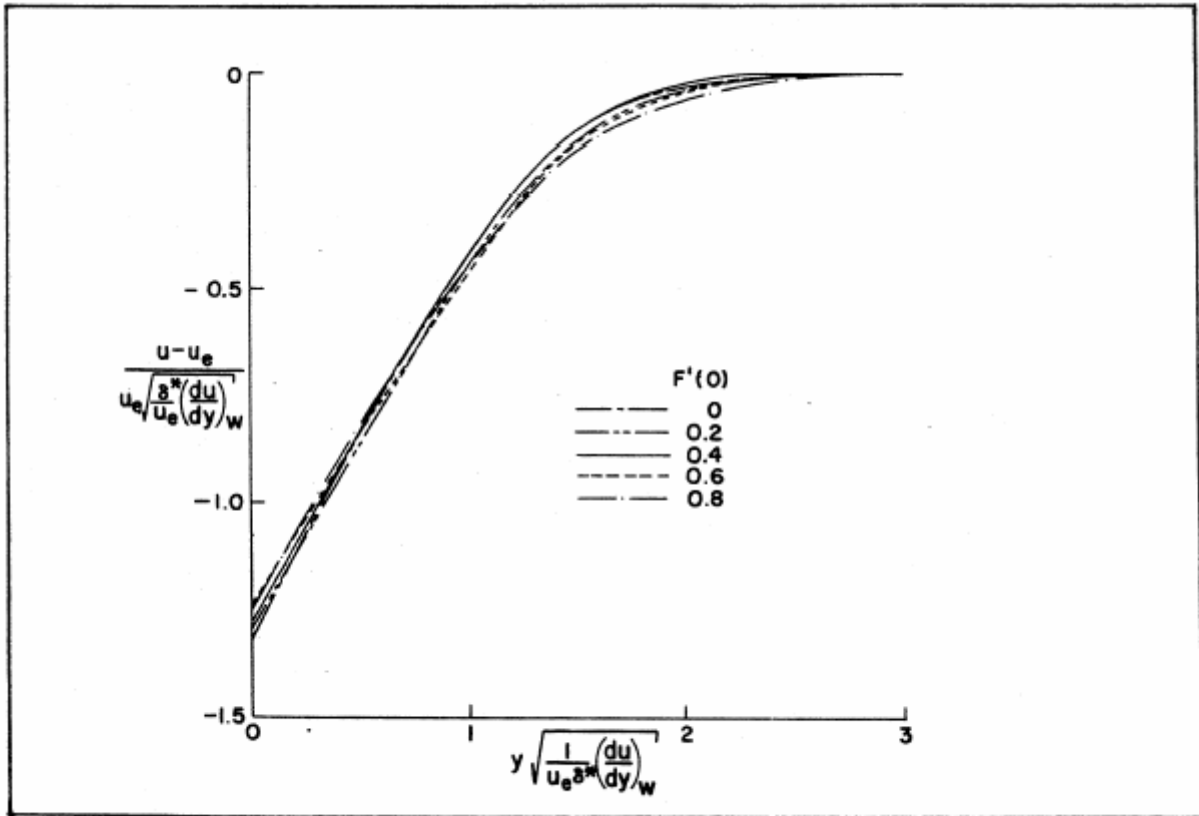


Fig. 32. Diagramma dei dati di fig. 31 in nuove coordinate.

medie nello strato turbolento dal noto comportamento dello strato laminare. In fig. (31) si riportano i diagrammi di velocità u/u_e in funzione di ζ , in cui $\zeta = y(u_e / (\epsilon_0 k))^{1/2}$.

Così rappresentati, i diagrammi di velocità non collassano in una curva avente carattere di universalità. Il problema può essere risolto scegliendo, per la rappresentazione delle curve, le variabili che seguono:

$$\frac{u_e - u}{u_e \left[\left(\frac{\delta^*}{u_e} \right) \left(\frac{du}{dy} \right)_0 \right]^{1/2}}, y \left[\frac{2}{u_e \delta^*} \left(\frac{du}{dy} \right)_0 \right]^{(1/2)}.$$

come mostrato in fig. (32).

Per ulteriori informazioni si faccia riferimento a (7) e (9).

3.13 Espressione del profilo di velocità secondo Coles

Si presenta, ora, un'espressione di profilo di velocità, che può essere utilizzata sia nella inner che nella outer region. L'espressione, che fu proposta da Coles [10], è la seguente:

$$u^+ = \Phi_1(y^+) + \frac{\Pi(x)}{k} w\left(\frac{y}{\delta}\right). \quad (57)$$

Essa è applicabile ai flussi con gradiente di pressione uguale o diverso da zero.

Se si esclude il substrato viscoso e la zona di transizione della inner region, la legge di parete $\Phi_1(y^+)$ è data da:

$$\Phi_1(y^+) = \frac{1}{k} \ln y^+ + c, \quad (58)$$

con $y^+ > 50$.

Le costanti k e c sono, normalmente, poste uguali a 0.41 e 5.0 rispettivamente. Può essere interessante segnalare che Simpson [45] mise in evidenza, sulla scorta dei suoi dati sperimentali, che i parametri k e c nell'equazione (58) non erano costanti e che, definito il numero di Reynolds dello spessore della quantità di moto come $R_\theta = u_e \theta / \nu$ per valori di $R_\theta < 6000$, essi variavano secondo le seguenti leggi empiriche:

$$k = 0.40 \left(\frac{R_\theta}{6000} \right)^{(-1/8)},$$

$$c = R_\theta^{(1/8)} [7.90 - 0.737 \ln |R_\theta|].$$

Molti altri studi sono stati condotti e vengono ancora condotti per valutare possibili leggi di variazione della costante k , che perderebbe così una caratteristica di universalità. In particolare, Tennekes [47], per flussi in condotti circolari, propone la seguente legge di variazioni di k :

$$\frac{1}{k} = 3 - 5R_*^{-1/3},$$

dove $R_* = u_* h / \nu$, essendo h il diametro del condotto. In fig. (33) si riporta l'andamento di k secondo Tennekes.

La quantità Π è il cosiddetto *parametro di profilo*, che, in generale, è funzione x . (inserire fig. 33)

La funzione $w(y/\delta)$, chiamata *funzione di scia* (wake function), è di carattere quasi universale, secondo molte esperienze.

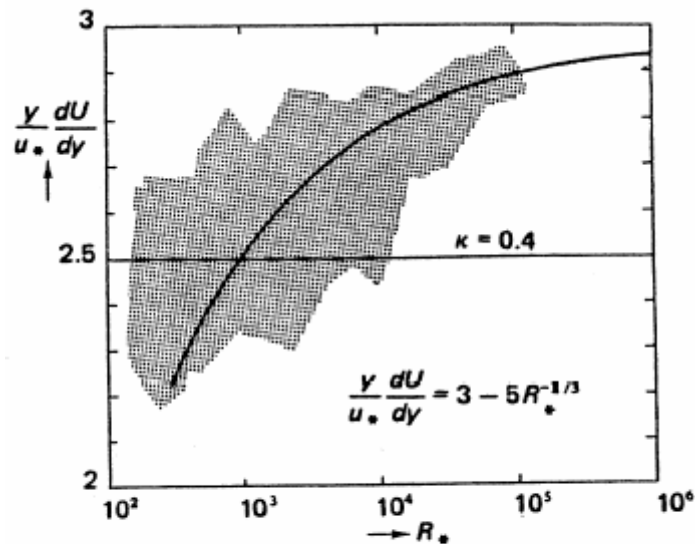


Fig. 33. Andamento di k secondo Tennekes per condotti a sezione circolare.

Comunque, è bene sia chiaro che, in generale, essa va adattata empiricamente ai profili di velocità determinati sperimentalmente, senza implicare alcuna similitudine universale. L'espressione della funzione di scia, proposta dallo stesso Coles, è la seguente:

$$w\left(\frac{Y}{\delta}\right) = 2 \sin^2\left(\frac{\pi}{2} \frac{Y}{\delta}\right).$$

Per flussi a gradiente di pressione nullo, il parametro di profilo Π è una costante uguale a 0.55, purché il numero di Reynolds dello spessore della quantità di moto R_θ sia maggiore di 5000. Per valori $R_\theta < 5000$, la variazione di Π con R_θ è mostrata in fig. (34).

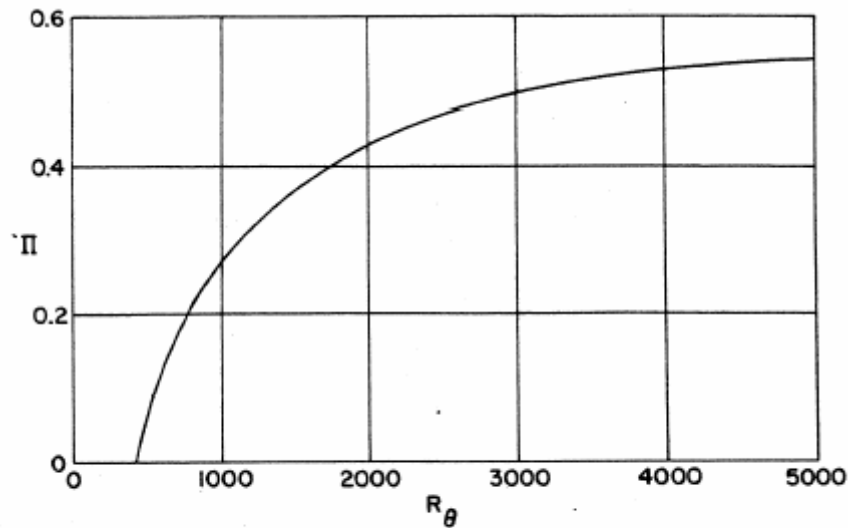


Fig. 34. Variazione del parametro di profilo di Coles in funzione di R_θ per flussi a gradiente nullo di pressione.

Analiticamente, per $R_\theta < 5000$, si può far riferimento alla seguente legge analitica:

$$\Pi = 0.55 [1 - \exp(-0.243 z_1^{1/2} - 0.298 z_1)],$$

dove $z_1 = (R_\theta/425 - 1)$.

Negli strati limiti in equilibrio, per ogni valore di gradiente di espressione, Π assume un valore costante a partire da un certo valore di R_θ . Negli strati limiti non in equilibrio, invece, Π dipende da x .

Volendo esprimere le conclusioni di Coles in termini di difetto di velocità si ottiene la seguente equazione:

$$\frac{u_\theta - u}{u_*} = -\frac{1}{k} \ln \frac{y}{\delta} + \frac{\Pi}{k} \left[2 - w\left(\frac{y}{\delta}\right) \right].$$

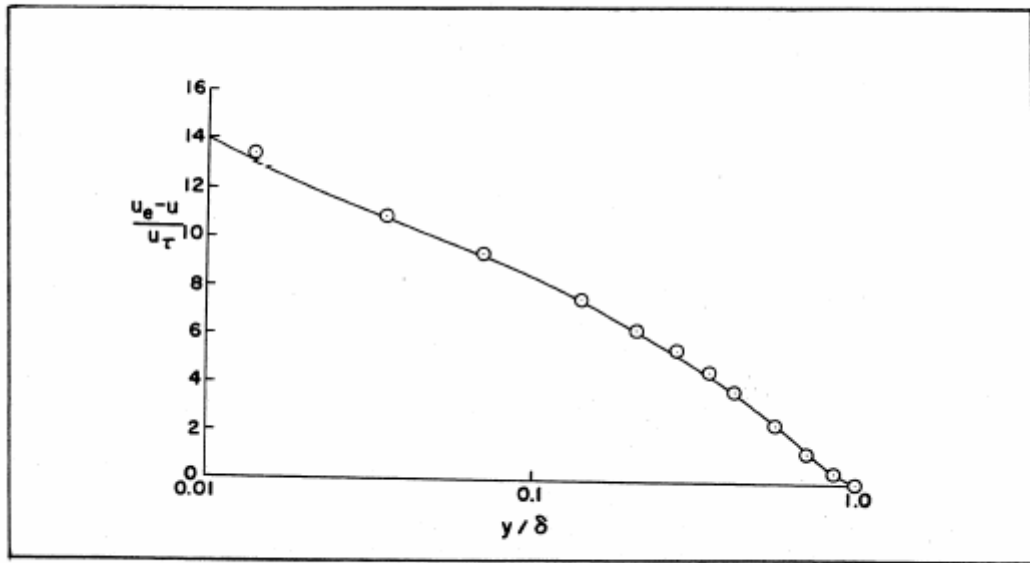


Fig. 35. Legge del difetto di velocità secondo Coles (linea continua). I punti sperimentali sono dati di Klebanoff (1954).

In fig. (35) si riportano i risultati sperimentali di Klebanoff [21] in accordo eccellente con la legge del difetto di velocità secondo Coles.

3.14 Distribuzioni di velocità medie in flussi turbolenti incompressibili su superfici scabre.

Nei precedenti paragrafi si sono riportate leggi di velocità medie facendo riferimento a superfici lisce. Si è constatato che la scabrezza influenza in modo sostanziale solo la inner region di uno strato limite e dunque si dirigerà la discussione a quella regione.

Di fatto, è impossibile avere una superficie assolutamente liscia, pertanto una parete può essere liscia solo in senso idraulico, quando l'altezza (equivalente) delle protuberanze ϵ è molto più piccola dello spessore del substrato viscoso. Una stessa parete, pertanto, in diverse condizioni idrauliche può comportarsi sia come scabra che come liscia.

Secondo esperienze e analisi teoriche, la legge di parete in caso di scabrezza uniforme può essere scritta come segue:

$$u^+ = \Phi_2(y^+, Re^*),$$

dove Re^* è un numero di Reynolds della scabrezza definito nel seguente modo:

$$Re^* = \frac{\epsilon u_*}{\nu}.$$

Nella parte completamente turbolenta della inner region, la legge di parete per una superficie a scabrezza uniforme è simile a quella per superficie liscia, eccetto che per la costante aggiuntiva c dell'equazione (54) ora funzione di Re^* . In questa regione, la legge di parete può essere scritta come segue:

$$u^* = \frac{1}{k} \ln y^* + B_1(Re^*), \quad (59)$$

dove è logico attendersi che k sia lo stesso del caso di superficie liscia. Pertanto, si può scrivere l'equazione (59) come:

$$u^* = \frac{1}{k} \ln y^* + c - \left[\frac{1}{k} \ln(Re^*) + c - B_2 \right],$$

dove c è la costante per superficie liscia e $B_2 = 1/k \ln(Re^*) + B_1(Re^*)$.

Si potrà, inoltre, scrivere:

$$u^* = \frac{1}{k} \ln y^* + c - \Delta u^*,$$

dove

$$\Delta u^* = \frac{\Delta u}{u_*} = \frac{1}{k} \ln(Re^*) + B_3,$$

in cui B_3 , che è uguale a $c - B_2$, è funzione della geometria della scabrezza e della sua densità.

La relazione fra Δu^* e Re^* è stata determinata per vari tipi di scabrezza uniforme per flussi a gradiente di pressione nullo. I risultati sono mostrati in fig. (36).

La figura mostra che la distribuzione di velocità, e quindi delle resistenze al moto, dipendono in modo marcato dalla forma della scabrezza e dalla sua distribuzione, per cui è estremamente difficile definire un coefficiente di scabrezza assoluto “ ϵ ”, che riesca a

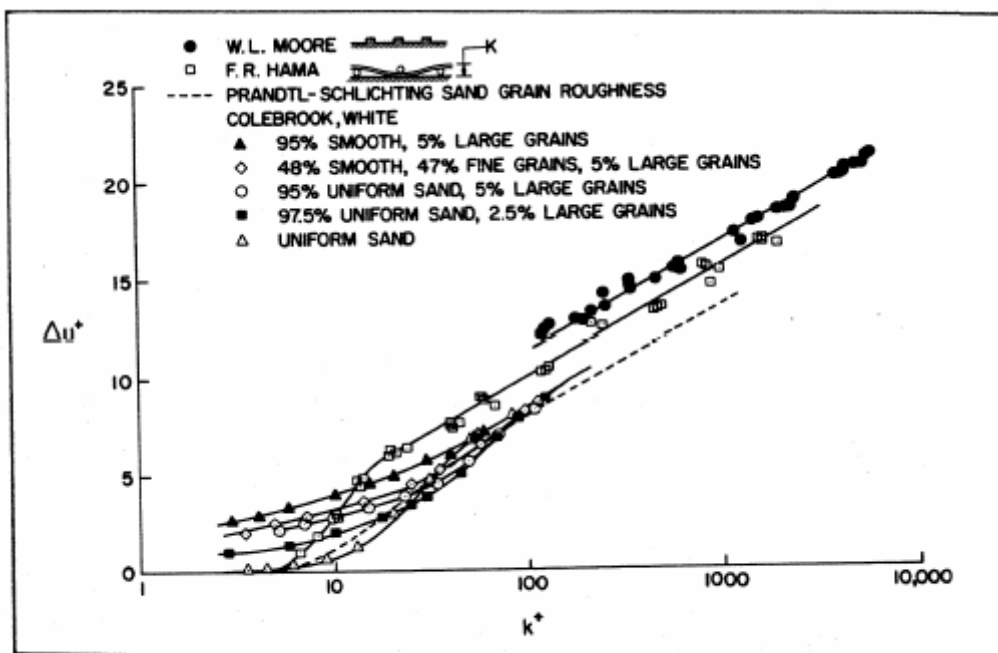


Fig. 36. Effetto della scabrezza sui profili di velocità. Dati di Clauser (1956).

tener conto di questi fattori. Queste considerazioni sono estremamente importanti quando si studiano, ad esempio, i moti in canali fluviali di tipo montano, ove la scabrezza è estremamente disuniforme.

Si trascura di descrivere le analoghe relazioni per la zona di transizione della inner region, dato che essa interviene per spessori molto più piccoli di quelli della zona completamente turbolenta. Il lettore interessato potrà, tuttavia, fare riferimento a Cebeci-Smith [7] per una dettagliata analisi al riguardo.

In particolare, alla luce di quanto asserito nel

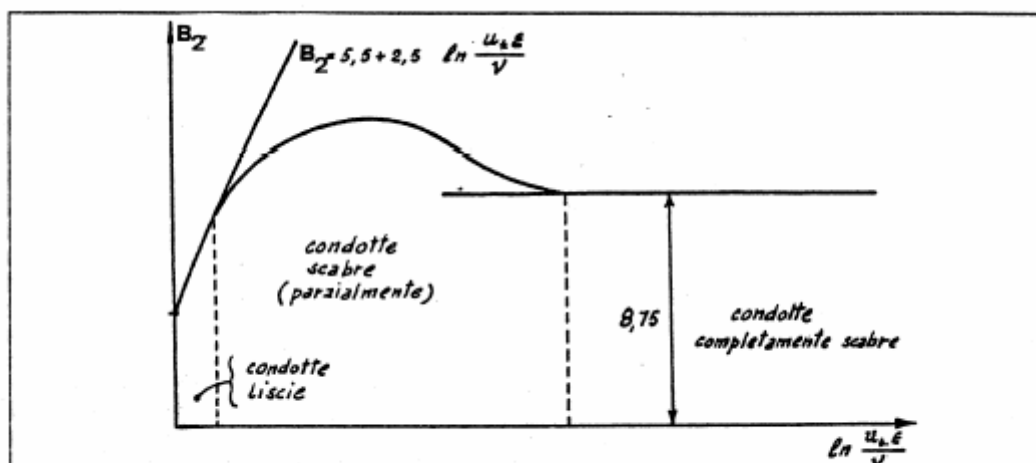


Fig. 37. Legge di dipendenza del numero puro B_2 dal numero puro Re_+ per le condotte lisce, scabre e completamente scabre.

par. 3.12.2, si riporta in fig. (37) l'andamento di B_2 in funzione Re^* per il caso di flussi in condotti circolari a scabrezza uniforme. Dall'analisi della curva rappresentata in questa figura, si osserva che, per superfici coperte da scabrezza uniforme, si possono identificare tre distinte regioni di flusso. Per il caso di sabbia monogranulare i limiti di queste regioni sono:

- 1) idraulicamente liscio : $Re^* < 5$
- 2) transizione : $5 < Re^* < 70$
- 3) pienamente scabro : $Re^* > 70$.

La condizione idraulicamente liscia esiste quando le altezze delle protuberanze sono così piccole che la scabrezza è sommersa nel substrato viscoso. Secondo Nikuradse [31], che fa riferimento sempre a scabrezze uniformi, questa regione si estende fino a $Re^* = 3.5$.

3.15 Contributo di E. Marchi alla determinazione delle leggi di distribuzione della velocità

Facendo riferimento alla teoria del trasporto delle quantità di moto, “come a quella che ha trovato finora le migliori verifiche sperimentali”, Marchi [29] propose una legge di distribuzione della velocità valida per il moto uniforme turbolento di correnti liquide in condotti chiusi ed aperti, partendo dalla legge di Prandtl-Von Karman e ottimizzandola alla luce delle obiezioni, già messe in evidenza nei precedenti paragrafi.

Considerando, dunque un condotto a sezione retta circolare nel quale si svolge un moto uniforme turbolento, si ricorda che le tensioni tangenziali variano, dalla parete all'asse, con legge lineare:

$$\tau = \tau_0 \left(1 - \frac{y}{y_0}\right), \quad (60)$$

con ovvio significato dei simboli.

Marchi propose di esprimere la lunghezza di mescolamento con la seguente relazione:

$$\frac{l}{y_0} = k \frac{y}{y_0} \exp\left(-\frac{y}{y_0}\right). \quad (61)$$

La curva che ne deriva, assumendo $k=0.38$, giustifica la relazione (61), poiché essa segue fedelmente i valori sperimentali di Nikuradse, come mostrato in fig. (38).

E' interessante osservare che la forma della (61) sembra attribuire alla lunghezza di mescolamento il carattere di un parametro probabilistico.

Tenuto conto delle (42) e (61), l'equazione (60)

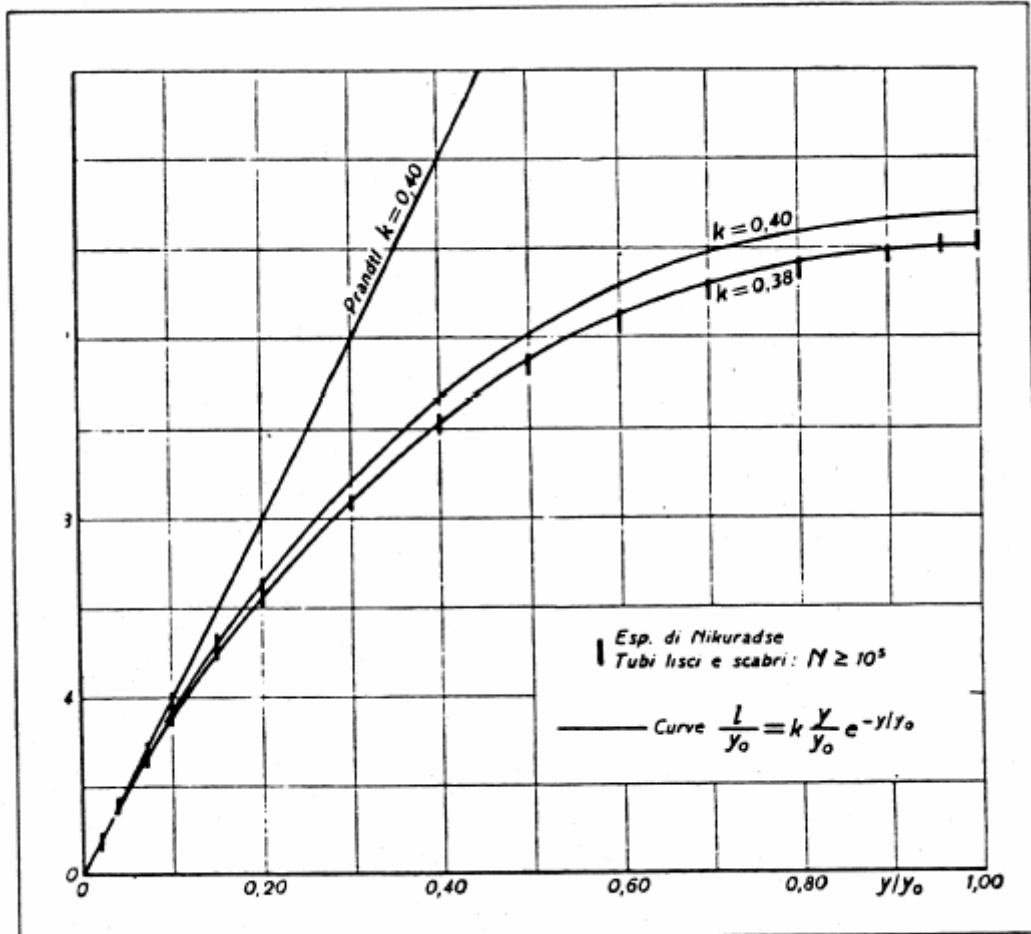


Fig. 38. Lunghezza di mescolamento. Rilevi sperimentali di Nikuradse.

Diviene:

$$\sqrt{\frac{\tau_0}{\rho} \left(1 - \frac{Y}{y_0}\right)} = k \cdot y \cdot \exp\left(-\frac{Y}{y_0}\right) \left|\frac{du}{dy}\right|,$$

e, indicato, come al solito $(\tau_0 / \rho)^{1/2}$ con u_* , si ottiene:

$$\frac{du}{u_*} = \frac{1}{k} \frac{\exp\left(-\frac{Y}{y_0}\right) \sqrt{1 - \frac{Y}{y_0}}}{y} dy,$$

ossia:

$$\frac{u}{u_*} = \frac{u_m}{u_*} + \frac{1}{k} \ln \frac{y}{y_0} + \frac{1}{k} \int_{y_0}^y \frac{\exp\left(\frac{y}{y_0}\right) \sqrt{1 - \frac{y}{y_0}} - 1}{y} dy. \quad (62)$$

Ponendo

$$\Phi'\left(\frac{y}{y_0}\right) = \int_1^{\frac{y}{y_0}} \frac{\frac{y}{y_0} \exp\left(\frac{y}{y_0}\right) \sqrt{1 - \frac{y}{y_0}} - 1}{\frac{y}{y_0}} d\left(\frac{y}{y_0}\right),$$

la (62) si scrive:

$$\frac{u}{u_*} = \frac{u_m}{u_*} + b \log\left(\frac{y}{y_0}\right) + \frac{1}{k} \Phi'\left(\frac{y}{y_0}\right), \quad (63)$$

con $b=2.30/k$.

Applicando la relazione per cui il limite del substrato viscoso è δ , tale che $\delta u_* / \nu = 11.5$ (numero di Nikuradse), è evidente che a distanza δ dalla parete devono coincidere i valori di velocità dati dalla (51) e dalla (62), ossia:

$$\frac{u_m}{u_*} + \frac{1}{k} \ln \frac{11.5 \nu}{u_* y_0} + \frac{1}{k} \Phi'\left(\frac{\delta}{y_0}\right) = \frac{\delta u_*}{\nu}.$$

Ricavata, dalla precedente equazione, l'espressione di u_m / u_* e sostituita nella (63), si ottiene, dopo ovvi passaggi, la seguente equazione:

$$\frac{u}{u_*} = a_1 + b \log\left(\frac{y u_*}{\nu}\right) + \frac{1}{k} \Phi\left(\frac{y}{y_0}\right), \quad (64)$$

valida per i tubi lisci (con $a_1=5.50$, $b=5.75$, $k=0.40$), in cui:

$$\Phi\left(\frac{y}{y_0}\right) = \int_0^{\frac{y}{y_0}} \frac{\frac{y}{y_0} \exp\left(\frac{y}{y_0}\right) \sqrt{1 - \frac{y}{y_0}}}{\frac{y}{y_0}} d\left(\frac{y}{y_0}\right).$$

Per i tubi scabbi, invece, vale la seguente equazione:

$$\frac{u}{u_*} = a_r + b \log\left(\frac{y}{e}\right) + \frac{1}{k} \Phi\left(\frac{y}{y_0}\right). \quad (65)$$

con $a_r=8.50$ (per moto assolutamente turbolento), $b=5.75$ e $k=0.40$.

Le (64) e (65) mettono in evidenza un sostanziale miglioramento rispetto alle corrispondenti leggi logaritmiche, visto che impongono la condizione di presenza del massimo di velocità in corrispondenza di $y=y_0$.

I valori della funzione $\Phi(y/y_0)$ possono essere calcolati una volta per sempre. Nella tabella (3) della pagina seguente si riportano alcuni di questi valori, calcolati con procedimenti numerici.

y/y_0	$\Phi(y/y_0)$	$\Phi(y/y_0)/k$	y/y_0	$\Phi(y/y_0)$	$\Phi(y/y_0)/k$
0	0.000	0.000	0.40	0.455	1.138
0.01	0.0124	0.031	0.50	0.546	1.365
0.02	0.0247	0.0618	0.60	0.620	1.550
0.04	0.0493	0.123	0.70	0.670	1.675
0.07	0.0858	0.215	0.80	0.689	1.723
0.10	0.122	0.305	0.90	0.661	1.653
0.15	0.182	0.455	0.95	0.618	1.545
0.20	0.241	0.603	1.00	0.541	1.353
0.30	0.353	0.883			

Tab. 3. Valori di Φ e di Φ/k .

3.16 Teoria del mesolayer

Una teoria recente [24] è la cosiddetta *teoria del mesolayer* (letteralmente teoria della zona intermedia), che, secondo i suoi autori, si porrebbe in netto contrasto con le recensioni classiche sia in termini di principio che in termini di risultati.

Per fissare le idee si farà riferimento ad un condotto di sezione retta circolare di diametro D in cui scorre un flusso in condizioni di moto turbolento uniforme.

La teoria classica conduce, sostanzialmente, alle seguenti tre assunzioni di base:

- 1) la “legge universale di parete” di Prandtl, valida per una zona vicina alla parete, appunto, in cui, in prima approssimazione, le quantità medie sono funzioni solo della viscosità cinematica ν , della velocità di attrito u_* e della distanza dalla parete y ;
- 2) la “similitudine del numero di Reynolds”, secondo la quale esiste un’altra regione, lontana dalla parete, in cui, in prima approssimazione, le quantità medie sono funzioni solo di u_* , $r=D/2$ e y^+ ;
- 3) il terzo assunto proprio della teoria classica è che, per alti numeri di Reynolds, le due regioni si sovrappongono dando luogo alla zona di overlap (regione di sovrapposizione), nella quale né ν né r hanno influenza.

Gli Autori della teoria del mesolayer affermano di rigettare il terzo dei tre assunto e di ritenere validi i primi due. In sostanza si rigetta l’idea di esistenza di una zona di overlap, e si propone l’esistenza di una zona intermedia (del mesolayer, appunto) che si estenda anche per elevati numeri di Reynolds. Ad avallo di questa affermazione, gli stessi Autori portano una serie di considerazioni di carattere fisico e teorico. In particolare, essi affermano che una ragione convincente dell’esistenza del mesolayer è legata al seguente ragionamento.

Si definisca $R_* = ru / \nu$. Si faccia riferimento alla figura (39), in cui sull’asse delle ascisse è riportato R_* , precedentemente definito, e sull’asse delle ordinate la distanza y^+ dalla parete, e alla fig. 40, più spesso riportata in letteratura, in cui sull’asse delle ascisse è riportato $\eta = y^+ / R_*$.

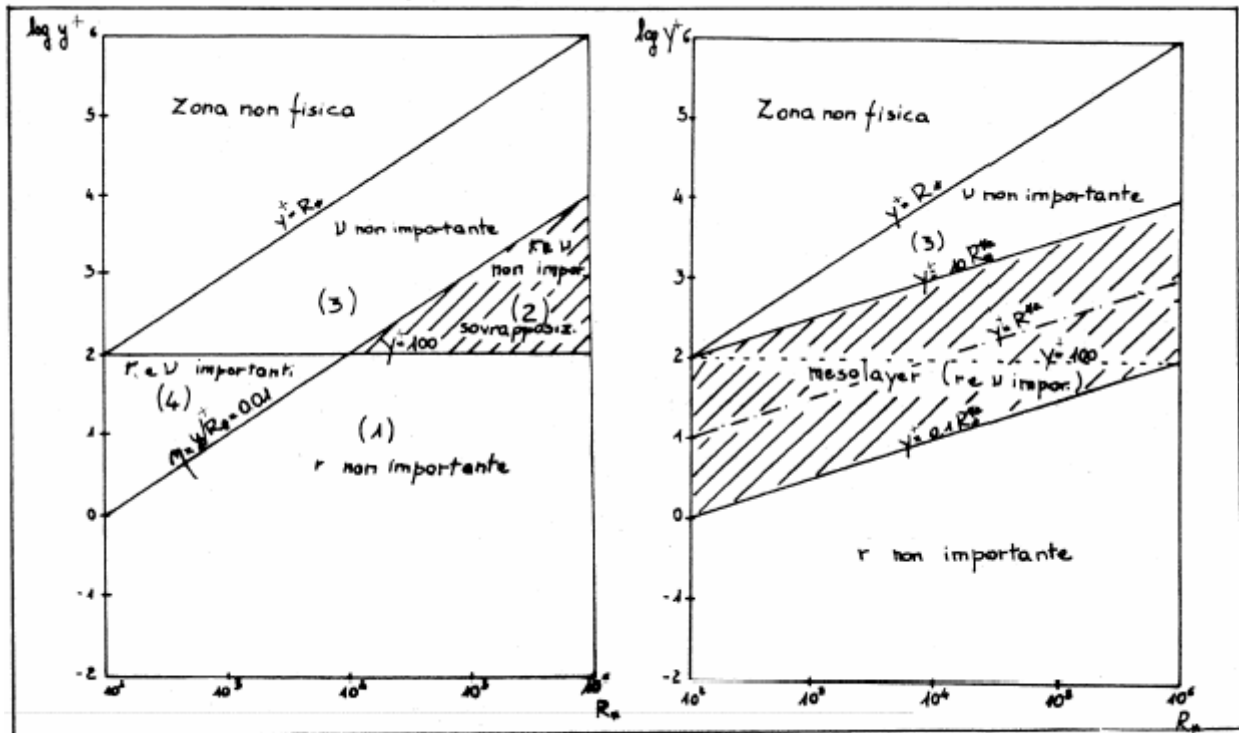


Fig. 39. Diagramma di y^+ in funzione di R_* .

Se si indica con $(y^+)_m$ il valore adimensionale di y in corrispondenza del quale si registra il massimo di

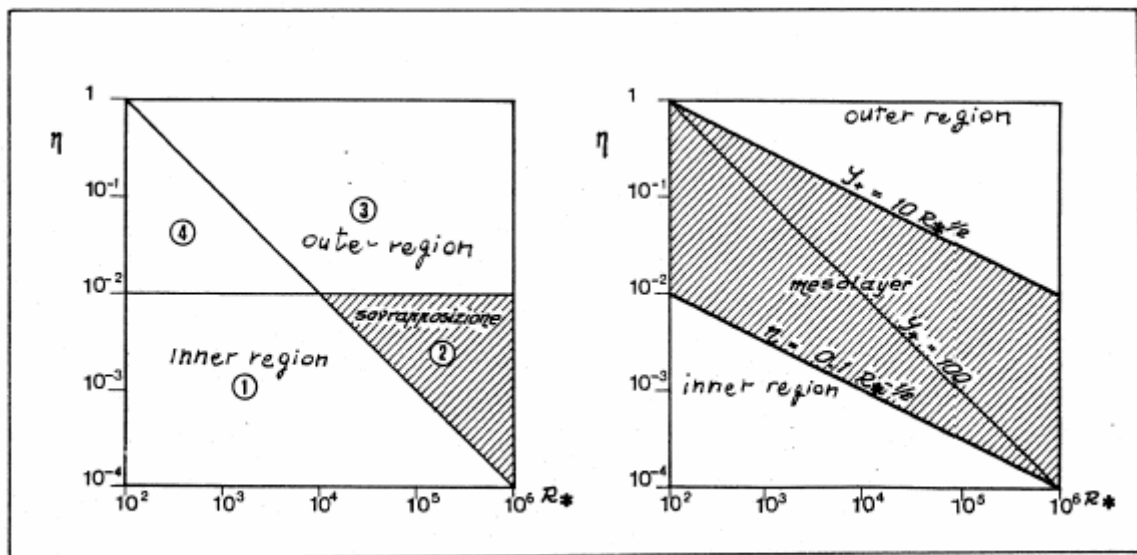


Fig. 40. Diagrammi di η in funzione di R_* .

tensione turbolenta (tensione di Reynolds e non la totale, il cui massimo si ha, evidentemente, sulla parete), cioè $(y^+)_m = y_m u_* / \nu$, le osservazioni sperimentali dimostrano che $(y^+)_m \propto R_*^{(1/2)}$. Ora, mentre la teoria del mesolayer arriva analiticamente a questa constatazione, la teoria classica richiede che $(y^+)_m \propto R_*$, in contrasto coi dati sperimentali. In effetti, come ammettono gli stessi Autori della

teoria del mesolayer, anche la teoria classica, spinta ad una più alta approssimazione, alla maniera del Tennekes (1968), Bush e Fendell (1972), Afzal e Yajnik (1973) e Afzal (1976), consente di concludere che $(y^+)_m \propto R_*^{(1/2)}$.

Al di là di questo, che parrebbe un discorso legato esclusivamente ad un grado di approssimazione, gli Autori della teoria del mesolayer mettono in evidenza una impossibilità di natura fisica di esistenza di una regione di overlap. E' bene osservare che la regione 4 delle figg. (39) e (40) non è di overlap, in quanto non risulta che per $R_* \rightarrow \infty$ sia, contemporaneamente, $\eta \rightarrow 0$, a differenza della regione 2.

Da un punto di vista pratico, gli Autori della teoria del mesolayer propongono delle leggi di velocità che si avvicinano molto alla forma logaritmica, anche se con pendenze diverse. In particolare, per quanto concerne il moto nei tubi, gli stessi Autori della teoria riconoscono che l'andamento della velocità è logaritmico in tutta la zona del mesolayer, anche se con pendenze diverse; in prima approssimazione essi ritengono di poter assumere una legge logaritmica unica su tutta la zona del mesolayer. Rimangono, peraltro, inalterati i significati e gli andamenti della velocità nella zona prossima alla parete (substrato viscoso) e nella zona prossima all'asse.

3.17 Diagrammi di intensità di turbolenza e proposta di una legge universale

Da quando precede è evidente che molti sono stati gli studi indirizzati verso la ricerca di leggi di velocità medie di trasporto per le correnti turbolente in condotti a sezione circolare (si ricorda, in particolare, Marchi) e per le correnti di strato limite (si ricorda, in particolare, Coles).

Minore attenzione è stata posta alla distribuzione delle componenti turbolente di velocità. Appare, dunque, di indubbio interesse lo studio condotto al riguardo da G. Pulci Doria e B. Bottillo [38].

Si supponga di adimensionalizzare i valori delle intensità di turbolenza attraverso la velocità di attrito u_* (facendo riferimento al caso di moto uniforme o di strato limite ideale a gradiente di pressione nullo a parete liscia), e di adimensionalizzare le distanze della parete, rispetto al raggio

nel caso di condotta e allo spessore nel caso di strato limite. Si riportino, poi, in un diagramma, i valori adimensionalizzati di intensità di turbolenza in funzione delle distanze adimensionalizzate.

In fig. (41) si presenta il risultato dell'operazione descritta effettuata da G. Pulci Doria e B. Bottillo, utilizzando, per le correnti, i dati di Laufer (23) e Perry e Abel (33) e, per lo strato limite, quelli di Klebanoff (21) (in quest'ultimo caso si faccia riferimento alla fig. (42)).

Da un attento esame del grafico di fig. (41), si nota l'esistenza di andamenti sostanzialmente sovrapponibili fino al valore delle ascisse 0.6. L'andamento non pare essere univoco per la zona residua fino all'unità.

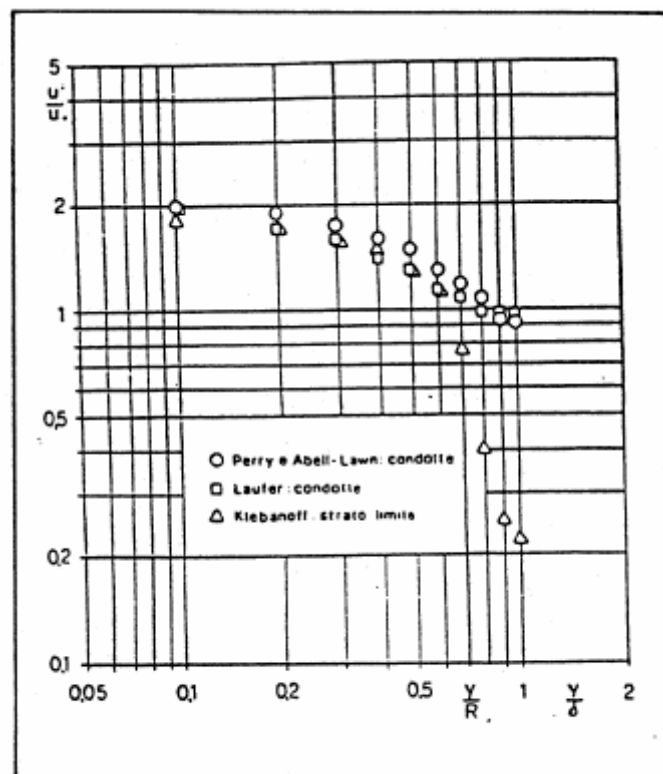


Fig. 41.

Pulci Doria spiega questa circostanza nella seguente maniera. Mentre il primo tratto delle distribuzioni di intensità di turbolenza (fino a 0.6 appunto) è influenzato principalmente dalla turbolenza generata dagli effetti di parete (e quindi è molto simile, in prima approssimazione, nei due casi di condotta e di strato limite), il tratto successivo risente, invece, in misura determinante di quanto accade oltre lo spessore considerato.

E' evidente, infatti, che nel caso di moto uniforme al di là dell'asse della condotta è presente una corrente che è, a sua volta, influenzata dall'altra parte della parete; nel caso, invece, di strato limite, oltre il suo spessore, è presente una corrente a potenziale, priva di turbolenza. In tali condizioni, appare normale trovare diversi livelli di turbolenza in prossimità dell'ascissa unitaria, con conseguenti andamenti divergenti dei diagrammi.

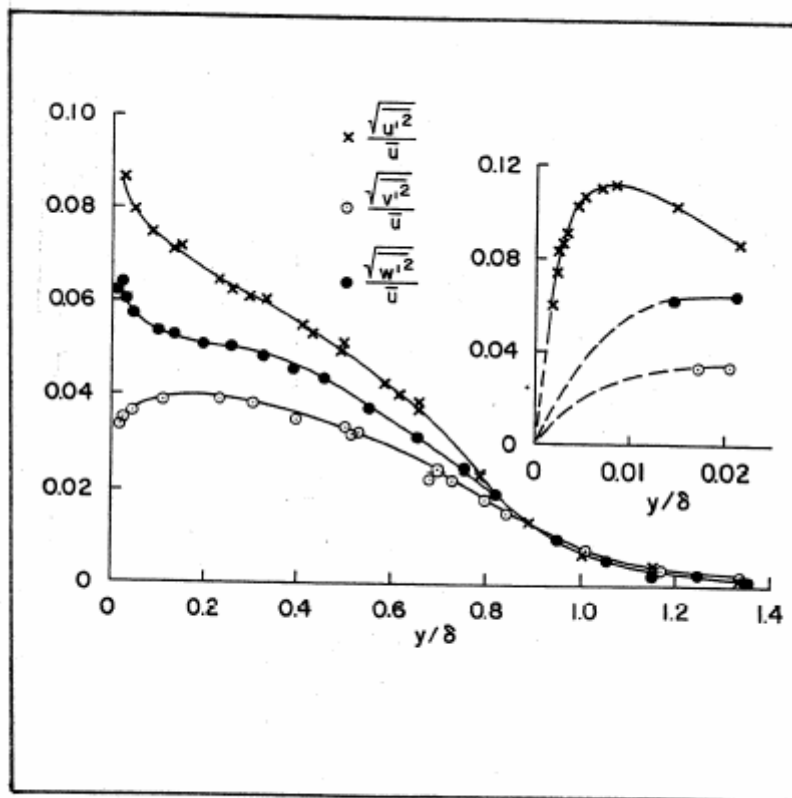


Fig. 42.

L'attento esame dei dati dei vari Autori precedentemente richiamati, consente di prevedere l'esistenza di una legge di tipo "universale" anche per le intensità di turbolenza. In generale, secondo Pulci Doria, si potrà assumere, ai fini della determinazione di tale legge, una forma (fondamentalmente analoga a quella di Marchi o di Coles per le velocità di trasporto) del tipo:

$$\frac{\sqrt{[(u')^2]_m}}{u_*} = f_0\left(\frac{Y}{R}\right) + \Pi_1 f'\left(\frac{Y}{R}\right),$$

in cui si potrà anche porre per definizione $f_0(1)=0$ e $f'(1)=1$.

Questa relazione può essere particolarizzata nel caso delle condotte, nel caso di strato limite tout court e nel caso di strato limite che Pulci Doria chiama “puramente ideale”, cioè con strato di ricoprimento perfettamente a potenziale:

$$\left[\frac{\sqrt{[(u')^2]_m}}{u_*} \right]_{cond} = f_{cond} \left(\frac{Y}{R} \right) = f_0 \left(\frac{Y}{R} \right) + \Pi_{1cond} f' \left(\frac{Y}{R} \right)$$

$$\left[\frac{\sqrt{[(u')^2]_m}}{u_*} \right]_{str.lim.} = f_{str.lim.} \left(\frac{Y}{\delta} \right) = f_0 \left(\frac{Y}{\delta} \right) + \Pi_{1str.lim.} f' \left(\frac{Y}{\delta} \right)$$

$$\left[\frac{\sqrt{[(u')^2]_m}}{u_*} \right]_{p.i.} = f_{p.i.} \left(\frac{Y}{\delta} \right) = f_0 \left(\frac{Y}{\delta} \right) + \Pi_{1p.i.} f' \left(\frac{Y}{\delta} \right) .$$

Alle equazioni precedenti si possono imporre le seguenti condizioni: per $0 \leq y/R \leq 0.6 \rightarrow f'(y/r) = 0$, perché in tal modo risulta, per il precisato campo di variazione di y/R , $f_{cond}(y/R) = f_{str.lim.}(y/\delta) = f_{s.i.}(y/\delta) = 0$ come deve essere.

Sulla base dell'osservazione per cui, nel caso “puramente ideale” (strato di ricoprimento perfettamente a potenziale), deve essere, per $y/\delta=1$, $f_{p.i.}(y/\delta)=0$, risulta necessariamente $\Pi_{1p.i.}=0$. Dai dati di fig. (39) e dall'osservazione per cui deve essere $f'(1)=1$, Pulci Doria ricava, per gli altri due casi: $\Pi_{1cond}=0.95$ e $\Pi_{1str.lim.}=0.21$. A questo punto, per ottenere l'andamento di $f'(y/R)$, l'Autore effettua la seguente procedura: poiché risulta

$$\Pi_{1cond} f' \left(\frac{Y}{R} \right) = f_{cond} \left(\frac{Y}{R} \right) - f_0 \left(\frac{Y}{R} \right)$$

$$\Pi_{1str.lim.} f' \left(\frac{Y}{\delta} \right) = f_{str.lim.} \left(\frac{Y}{\delta} \right) - f_0 \left(\frac{Y}{\delta} \right) ,$$

sottraendo membro a membro, per $y/R=y/\delta$, si ottiene:

$$f' \left(\frac{Y}{R} \right) = \frac{f_{cond} \left(\frac{Y}{R} \right) - f_{str.lim.} \left(\frac{Y}{\delta} \right)}{\Pi_{1cond} - \Pi_{1str.lim.}} .$$

Dalla precedente equazione è possibile ottenere l'andamento di $f'(y/R)$ e di conseguenza l'andamento di $f_0(y/R)$. In tal modo risulta definita la legge universale per le intensità di turbolenza, nella quale andrà inserito il valore di Π_1 , che è essenzialmente influenzato dal livello di turbolenza. Si ricorda che si dovrà sostituire δ a R nel caso di strato limite.

4 LEGGI DI VELOCITÀ E RESISTENZA NEI CONDOTTI

4.1 Leggi di resistenza per condotti circolari

Lo scopo essenziale dell'analisi dei profili delle velocità medie di trasporto nelle condizioni di turbolento è di poter ricavare una legge di resistenza di facile applicazione per ogni problema di ingegneria idraulica.

Alla luce di quanto detto nei paragrafi precedenti, si è, senz'altro, in grado di fornire le espressioni delle leggi di resistenza per il caso di condotti a sezione retta circolare.

Si farà riferimento, in termini di leggi di velocità, alla relazione logaritmica (64), trascurando l'effetto del substrato viscoso e della wake function, sia nella formulazione di Coles che attraverso la funzione $\Phi(y/y_0)$ di Marchi.

Si supponga di avere un condotto circolare di raggio r_0 in cui vi sia un flusso in condizioni di moto turbolento uniforme. Se si indica con U la velocità media di tutta la sezione, deve essere:

$$U = \frac{1}{\pi r_0^2} \int_0^{r_0} u 2\pi (r_0 - y) dy. \quad (66)$$

Se si sostituisce la (64) nella (66) si ha:

$$\frac{U}{u_*} = a_1 - \frac{3}{2k} + b \log \left(\frac{r_0 u_*}{\nu} \right). \quad (67)$$

Per le note condizioni di equilibrio sintetizzate dalla (11), si ottiene:

$$u_* = \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} = \sqrt{R J g}, \quad (68)$$

avendo indicato con τ_0 la tensione tangenziale alla parete, ρ la densità, R il raggio idraulico del condotto, J la cadente piezometrica e g l'accelerazione di gravità.

Tenuto conto della (68) e ponendo, al solito, $J=\lambda U^2/[2g(4R)]$ si ha:

$$\frac{U}{u_*} = \frac{U}{\sqrt{RJg}} = \sqrt{\frac{8}{\lambda}}$$

Sicché la (67) diviene:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = \frac{1}{\sqrt{8}} \left(a_1 - \frac{3}{2k} - b \log 4\sqrt{2} \right) + \frac{b}{\sqrt{8}} \log (Re\sqrt{\lambda}), \quad (69)$$

dove si è indicato con $Re=(2r_0U)/\nu=(4RU)/\nu$ il numero di Reynolds.

In maniera più sintetica, la (69) si può scrivere:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = A_1 + B \log (Re\sqrt{\lambda}), \quad (70)$$

che rappresenta la legge di resistenza nel caso di tubo liscio.

Sulla base dei valori di a_1 e di b indicati nel paragrafo 3.14, si ottiene $A_1=-0.91$ e $B=2.03$ in soddisfacente accordo con i coefficienti dell'analoga espressione introdotta da Nikuradse.

Operando allo stesso modo, ma partendo dalla (65), si ottiene la seguente espressione, valida per tubi scabri:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = A_r + B \log \left(\frac{d}{\epsilon} \right), \quad (71)$$

in cui $d=2r_0=4R$ ed ϵ la scabrezza relativa.

I valori di A_r e B , calcolati nel regime assolutamente turbolento partendo dai valori sperimentali di a_r e b , sono: $A_r=1.07$ e $B=2.03$.

Per quanto attiene la zona di transizione, nel caso dei tubi commerciali, si può ricordare la ormai famosa legge di Colebrook:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \log \left(\frac{2.51}{Re\sqrt{\lambda}} + \frac{1}{3.71} \frac{\epsilon}{d} \right).$$

A proposito della succitata legge, si ricorda, che essa non nasce da un preciso sviluppo teorico e che, dunque, la giustificazione del suo ormai largo impiego va ricerca nel fatto che essa è una buona formula interpolare, avallata da una lunga serie di riscontri sperimentali e pratici.

Non resta da mettere in evidenza che il procedimento adottato per ricavare le (70) e (71), cioè trascurando la wake function, comporta degli errori. In ogni caso, per quanto si possa obiettare che l'entità di questi errori sia trascurabile ai fini tecnici, va, quanto meno richiamata l'attenzione sul significato che leggi del tipo della wake function hanno sulle integrazioni che si sono proposte in questo paragrafo. Va, cioè, rilevato che il contributo dei termini correttivi, a integrazione avvenuta, si riduce ad un valore "costante", senza modificare la "forma" delle leggi di resistenza. Ed è proprio questo risultato che giustifica gli studi necessari per adeguare ai rilievi sperimentali le leggi di resistenza ricavate a partire da leggi puramente logaritmiche.

4.2 Reimpostazione teorica delle leggi di velocità per condotti di sezione non circolare

Le leggi di distribuzione di velocità e le leggi di resistenza, valide per strato limite turbolento o per moto uniforme turbolento in condotti di sezione retta circolare, non si possono estendere tout court alle sezioni di forma generica. Le difficoltà da superare per un tale tipo di estensione sono, generalmente, la mancanza di simmetria geometrica e la mancanza di misure di velocità altrettanto numerose e sistematiche di quelle eseguite a sezione circolare.

Tentativi di reimpostare teoricamente il problema del moto uniforme in condotti di sezione non circolare sono stati fatti da Nikuradse e, più recentemente, da E. Marchi [29].

Marchi riprese la teoria del trasporto della quantità di moto, applicandola al moto uniforme turbolento entro un condotto cilindrico ad asse rettilineo avente la sezione generica di contorno B_0 , come indicato in fig. (43), facendo l'importante ipotesi di ritenere il valor medio temporale $(u'v')_m$ funzione solo della distanza y dalla parete. Si ritiene, cioè, valida, in prima approssimazione, l'ipotesi di turbolenza distribuita statisticamente con gli stessi caratteri ad uguale distanza dalla parete, salvo in vicinanza di punti angolosi.

Facendo riferimento, dunque, alle conclusioni di Marchi, si può ritenere che, per una sezione generica del tipo rappresentata in fig. (43), siano formalmente valide le leggi (64) e (65), purché si sostituiscano, in esse, al valore, costante per condotte di sezione circolare, di u_* il valore medio, su tutta la superficie di contorno, $(u_*)_m$, e al valore di $a_l=5.50$ e $a_r=8.50$, rispettivamente per condotti circolari lisci e scabri in condizione di moto assolutamente turbolento, i valori, da ricavarsi sperimentalmente, di a_l (funzione di $u_* / (u_*)_m$) e a_r (funzione di $u_* / (u_*)_m$).

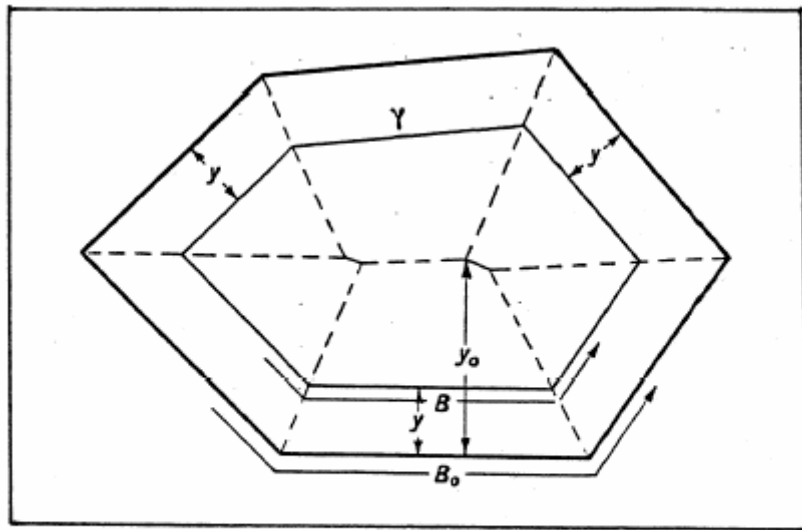


Fig. 43. Schema della sezione trasversale di un condotto.

Si ottengono così le seguenti leggi:

$$\frac{u}{(u_*)_m} = a_l \left(\frac{u_*}{(u_*)_m} \right) + b \log \left[\frac{y (u_*)_m}{\nu} \right] \quad (72)$$

valida nel campo del regime turbolento di condotto liscio, e:

$$\frac{u}{(u_*)_m} = a_r \left(\frac{u_*}{(u_*)_m} \right) + b \log \left[\frac{y}{\epsilon} \right] \quad (73)$$

valida nel campo del regime assolutamente turbolento di condotto scabro. Esse sono da intendersi come leggi variabili, in generale, al variare della normale al contorno lungo la quale si studia il profilo di velocità.

Le (72) e (73) possono essere ulteriormente ottimizzate, operando come già fatto nel paragrafo 3.14, ottenendo:

$$\frac{u}{(u_*)_m} = a_1 \left(\frac{u_*}{(u_*)_m} \right) + b \log \left[\frac{y u_*}{\nu} \right] + \frac{\Phi \left(\frac{y}{y_0} \right)}{k} \quad (74)$$

per condotti lisci, e:

$$\frac{u}{(u_*)_m} = a_r \left(\frac{u_*}{(u_*)_m} \right) + b \log \left[\frac{y}{\epsilon} \right] + \frac{\Phi \left(\frac{y}{y_0} \right)}{k} \quad (75)$$

per condotti scabri in regime di moto assolutamente turbolento.

Le (72) e (73), o le corrispondenti (74) e (75), mettono in evidenza che:

- 1) a_1 ed a_r non sono costanti, ma funzioni della distribuzione sul contorno di $u_*/(u_*)_m$;
- 2) in assegnate condizioni di moto, i valori della velocità u dovrebbero variare con il logaritmo della distanza della parete attraverso un coefficiente $u_* b$ diverso da normale a normale, variando proporzionalmente alla radice quadrata della tensione tangenziale sul contorno. In effetti, secondo le (72) e (73), i valori della velocità u variano pure linearmente con il logaritmo della distanza dalla parete, ma attraverso un coefficiente $(u_*)_m b$ che non dipende dalla distribuzione di u_* sul contorno; esso è proporzionale al valor medio $(u_*)_m = (RJg)^{1/2}$ e quindi costante su qualunque normale al contorno. In altre parole, i valori di velocità sono influenzati dalla non uniforme distribuzione di u_* soltanto attraverso i parametri a_1 e a_r ;
- 3) per quanto riguarda la variazione di a_1 o di a_r in funzione di $u_*/(u_*)_m$ si sostiene che il principio variazionale di Ghetti, richiamato al paragrafo 2.10, possa fornire quella ulteriore relazione necessaria per definire teoricamente le funzioni ricercate. Il Marchi, tuttavia, non sviluppa questo procedimento, essenzialmente perché non si sarebbe in grado di sottoporre i risultati ad una verifica sperimentale;
- 4) le (72) e (73), nel caso di $u_* = (u_*)_m$, cioè quando la tensione tangenziale al contorno è uniforme, si riducono alla analoghe espressioni relative ai condotti di sezione retta circolare.

4.3 Reimpostazione teorica delle leggi di resistenza nei condotti di sezione non circolare

Se si accetta la (72) a rappresentare la distribuzione di velocità, si potrà procedere al calcolo delle leggi di resistenza così come proposto dallo stesso Marchi [29].

Si faccia riferimento alla fig. (43) e si consideri dapprima il caso di pareti lisce.

Considerando la (72), reimpostata con i logaritmi naturali, si calcola la media u_n dei valori di u lungo una linea generica di lunghezza B , a distanza costante y dal contorno:

$$\frac{u_n}{(u_*)_m} = \frac{1}{B} \int_0^B \frac{u}{(u_*)_m} dB = \frac{1}{B} \int_0^B a_1 dB + \frac{1}{k} \ln \left[\frac{y(u_*)_m}{v} \right].$$

Il valore medio U della velocità in tutta la sezione sarà dato quindi, dalla:

$$\frac{U}{(u_*)_m} = \frac{1}{\Omega} \int_0^{y_0} \frac{u_n}{(u_*)_m} B dy = \frac{1}{\Omega} \int_0^{y_0} dy \int_0^B a_1 dB + \frac{1}{k\Omega} \int_0^{y_0} \ln \left[\frac{y(u_*)_m}{v} \right] B dy.$$

(76)

Sia

$$C_1 = \frac{1}{\Omega} \int_0^{y_0} dy \int_0^B a_1 \left(\frac{u_*}{(u_*)_m} \right) dB$$

un coefficiente adimensionale che dipende solo dalla distribuzione di a_1 sul contorno, ed inoltre sia $B = B_0 - ay$, dove il coefficiente a dipende pure dalla geometria della sezione.

La (76) si trasforma, con ovvi passaggi, nella

$$\frac{U}{(u_*)_m} = C_1 - \frac{1}{k} + \frac{\beta}{k} + b \log \left(\frac{R(u_*)_m}{v} \right), \quad (77)$$

dove si è posto

$$\beta = \ln \frac{y_0}{R} - \frac{ay_0^2}{4\Omega}.$$

Tenuto conto delle posizioni $J = \lambda U^2 / [2g(4R)]$ e $(u_*)_m = (RJg)^{1/2}$, la (77) diviene:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = \frac{1}{\sqrt{8}} \left(C_1 - \frac{1-\beta}{k} - b \log 8\sqrt{2} \right) + \frac{b}{\sqrt{8}} \log (Re\sqrt{\lambda}),$$

o, in maniera più concisa,

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = A_{lf} + B \log (Re\sqrt{\lambda}) , \quad (78)$$

con $Re = (4RU)/v$.

La (78) rappresenta la legge di resistenza nei condotti lisci di sezione qualunque. Il coefficiente

$$B = \frac{b}{\sqrt{8}}$$

è indipendente dalla forma della sezione e può essere posto uguale a 2.0 (quindi $k=0.40$).

Invece il coefficiente

$$A_{lf} = \frac{1}{\sqrt{8}} \left(C_1 - \frac{1-\beta}{k} - b \log 8\sqrt{2} \right)$$

dipende dalla forma della sezione sia attraverso β che attraverso C_1 .

Operando allo stesso modo, ponendo

$$C_r = \frac{1}{\Omega} \int_0^{y_0} dy \int_0^B a_r \left(\frac{u_*}{(u_*)_m} \right) dB$$

si ottiene la legge di resistenza nei condotti scabri di sezione non circolare in regime assolutamente turbolento:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = A_{rf} + B \log \left(\frac{4R}{e} \right) , \quad (79)$$

in cui $B=2.0$ e

$$A_{rf} = \frac{1}{\sqrt{8}} \left(C_r - \frac{1-\beta}{k} - b \log 4 \right) .$$

Si riscrivono, ora, i coefficienti A_{lf} e A_{rf} facendo comparire i valori A_l a A_r relativi alla sezione circolare:

$$A_{lf} = A_l - \frac{1}{\sqrt{8}} \left(b \log 2 - \frac{1}{2k} \right) + \frac{1}{\sqrt{8}} \left(C_l - a_{l,circ} + \frac{\beta}{k} \right) \quad (80)$$

$$A_{rf} = A_r - \frac{1}{\sqrt{8}} \left(b \log 2 - \frac{1}{2k} \right) + \frac{1}{\sqrt{8}} \left(C_r - a_{r,circ} + \frac{\beta}{k} \right) . \quad (81)$$

Le (80) e (81) mostrano che l'influenza della forma determina una variazione sui coefficienti A rappresentata dalla somma dei due termini:

$$-\frac{1}{\sqrt{8}} (b \log 2 - \frac{1}{2k}) = -0.17, \quad \frac{\beta}{\sqrt{8K}} = \frac{\beta}{1.13}$$

costanti per una data sezione, più un termine che dipende dalla distribuzione di $a_l [u_* / (u_*)_m]$ o di $a_r [u_* / (u_*)_m]$ sul contorno.

A questo punto, poiché il confronto tra i diagrammi di velocità sperimentali è insufficiente per dare un'indicazione precisa sulla differenza di distribuzione di a_l in regime liscio e di a_r in regime assolutamente turbolento, Marchi fa un'ipotesi plausibile, ossia che siano analoghe la distribuzioni di a_l e di a_r . Pertanto si potranno scrivere le (80) e (81) nella forma:

$$A_{lrf} = A_l + A_f$$

$$A_{rrf} = A_r + A_f$$

con un unico valore di A_f nei due casi.

Tenuto conto dei valori di $A_l = -0.8$ e $A_r = 1.14$ assegnati da Nikuradse e posto

$$A_f = 2.0 \log f$$

si ottengono le seguenti leggi di resistenza:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 2.0 \log \left(\frac{f Re \sqrt{\lambda}}{2.51} \right) \quad (82)$$

per il regime liscio, e

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 2.0 \log \left(\frac{3.71 f (4R)}{e} \right) \quad (83)$$

per il regime assolutamente turbolento.

Le (82) e (83) mettono in evidenza come il coefficiente di forma f , da determinarsi per via sperimentale, possa interpretarsi anche come un coefficiente moltiplicativo del raggio idraulico.

Si potrà, quindi, tener conto dell'influenza della sezione attraverso un *raggio idraulico convenzionale* "di forma":

$$R_f = fR. \quad (84)$$

Di fatto un'operazione di questo tipo si realizza anche per le condizioni di moto laminare attraverso la relazione $\lambda = 64/(fR_e)$. E' bene, tuttavia, mettere in evidenza che i coefficienti di forma di una condotta sono diversi a seconda che si consideri il moto laminare o il moto turbolento.

4.4 Caso di condotto a sezione trasversale anulare concentrica.

Il caso di condotto a sezione trasversale anulare merita una trattazione a parte, per le condizioni del tutto particolari che lo caratterizzano. In effetti, i condotti anulari sono costituiti da due superfici cilindriche concentriche, ossia due confini facilmente descrivibili geometricamente per le condizioni al contorno, ciascuna delle quali esercita sul fluido due diverse ed uniformi tensioni tangenziali. Anche le condizioni di simmetria sono particolarmente favorevoli, ed inoltre, a seconda del rapporto tra il raggio intero ed il raggio esterno, si passa, ai limiti, da una situazione vicina a quella di condotto circolare ad una situazione vicina a quella di due piastre piane parallele. Questa condizione particolare rende, dunque, i condotti anulari interessanti per le analisi di laboratorio, fermo restando che ormai vasta è la loro applicazione nel campo dell'ingegneria meccanica, nucleare e chimica.

Una complicazione propria dei condotti anulari è quella di stabilire il raggio in cui si ha il massimo di velocità. In effetti, come si è visto nel paragrafo 2.3, il raggio del massimo di velocità è di facile determinazione nel caso di moto laminare. Questo aveva condotto in errore molti Autori del passato, che prima che fosse fornita una trattazione razionale per i condotti anulari, determinavano il raggio del massimo di velocità, nelle condizioni di moto turbolento, esattamente come nel moto laminare. In effetti, già nel 1932, Lorenz [25] mise in evidenza come apparisse ingiustificata una simile semplificazione.

Nel 1966, Macagno e McDougall [27], sulla scorta dei diagrammi di velocità allora disponibili, intrapresero uno studio al fine di proporre una legge per la determinazione del raggio del massimo di velocità.

Nel caso di condotti a parete liscia, essi assunsero, per le distribuzioni di velocità, le seguenti espressioni simboliche, rispettivamente per la zona interna e la zona esterna, dove la zona interna è quella che va dalla parete interna al punto di massimo di velocità (ossia di tensione tangenziale nulla), mentre la zona esterna è quella rimanente:

$$\frac{v_1}{\sqrt{\frac{\tau_1}{\rho}}} = F_1 \left(\frac{y_1}{y_1'} \right)$$

$$\frac{v_2}{\sqrt{\frac{\tau_2}{\rho}}} = F_2 \left(\frac{y_2}{y_2'} \right),$$

avendo indicato con y_1' ed y_2' i parametri che adimensionalizzano y_1 e y_2 .

E' evidente che dalle due precedenti equazioni si ricava la seguente espressione:

$$\frac{\tau_1}{\tau_2} = \frac{F_2^2 \left(\frac{r_2 - r_m}{y_2'} \right)}{F_1^2 \left(\frac{r_m - r_1}{y_1'} \right)}.$$

Poiché valgono le seguenti due relazioni:

$$\tau_1 = \gamma J R_1,$$

in cui $R_1 = \pi(r_m^2 - r_1^2)/(2\pi\tau_1)$ è il raggio idraulico interno,

$$\tau_2 = \gamma J R_2,$$

in cui $R_2 = \pi(r_2^2 - r_m^2)/(2\pi\tau_2)$ è il raggio idraulico esterno, Macagno e McDougall ricavano:

$$\frac{r_2}{r_1} \frac{r_m^2 - r_1^2}{r_2^2 - r_m^2} - \frac{F_2^2}{F_1^2} = 0, \quad (85)$$

che consente di definire la circonferenza isotachia con il massimo di velocità. Gli autori, pur riconoscendo che le funzioni F_1 ed F_2 possono essere caratterizzate da parametri diversi, applicano per esse la classica legge logaritmica di Prandtl-Von Karman presentata nei paragrafi precedenti.

Nel caso di pareti lisce, gli Autori, partendo dall'equazione dei profili di velocità:

$$\frac{v_i}{\sqrt{\frac{\tau_i}{\rho}}} = A \ln \left(\frac{\sqrt{\tau_i/\rho}}{v} y_i \right) + B, i=1, 2,$$

che può anche essere scritta nel modo seguente:

$$\frac{v_i}{\sqrt{\frac{\tau_i}{\rho}}} = A \ln \left(C \frac{\sqrt{\tau_i/\rho}}{v} y_i \right),$$

ottengono, dalla (85), la seguente relazione:

$$\sqrt{\frac{\beta^2 - \alpha^2}{\alpha(1 - \beta^2)}} = \frac{\ln \left[\frac{C}{4\sqrt{2}} \left(\frac{1 - \beta^2}{1 - \alpha} \right)^{1/2} \left(\frac{1 - \beta}{1 - \alpha} \right) Re\sqrt{\lambda} \right]}{\ln \left[\frac{C}{4\sqrt{2}} \left(\frac{\beta^2 - \alpha^2}{\alpha(1 - \alpha)} \right)^{1/2} \left(\frac{\beta - \alpha}{1 - \alpha} \right) Re\sqrt{\lambda} \right]},$$

avendo posto $\alpha = r_1/r_2$ e $\beta = r_m/r_2$. In fig. (44) si riporta il diagramma di β in funzione di α per condotti a pareti lisce.

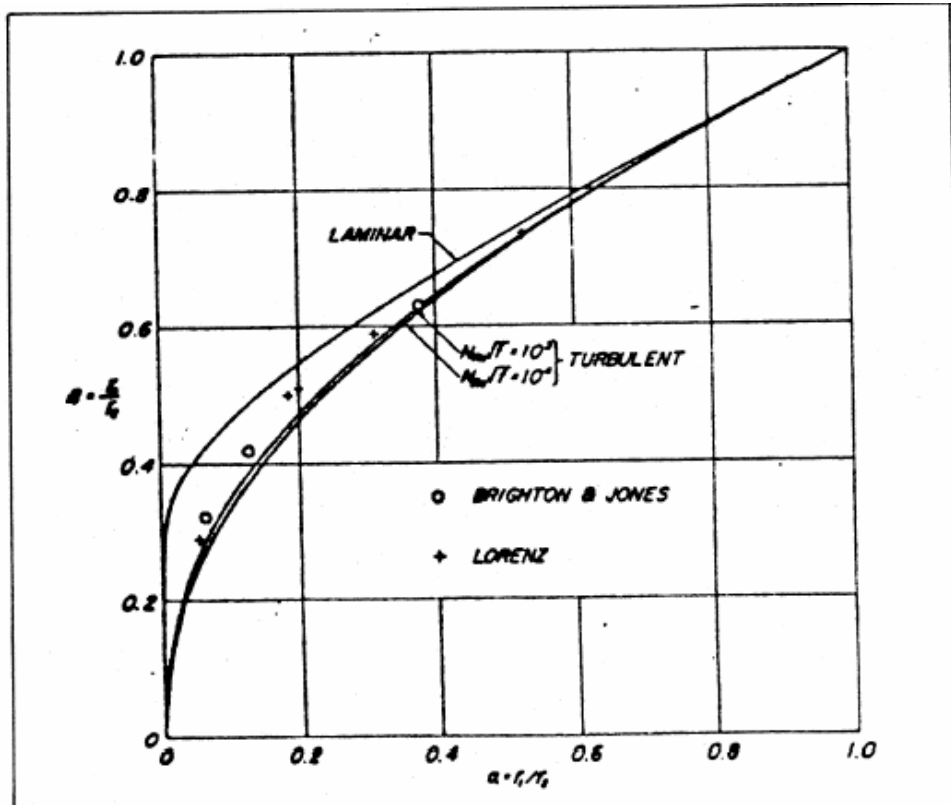


Fig. 44. Posizione relativa del massimo di velocità in funzione del raggio interno ed esterno per flussi laminari e condotti idraulicamente lisci.

Nel caso di moto assolutamente turbolento, gli Autori, partendo dalla seguente espressione dei profili di velocità:

$$\frac{v_i}{\sqrt{\frac{\tau_i}{\rho}}} = A \ln \left(C' \frac{y_i}{e_i} \right); i=1, 2,$$

pervengono alla seguente equazione per il raggio del massimo di velocità:

$$\sqrt{\frac{r_2}{r_1} \frac{r_m^2 - r_1^2}{r_2^2 - r_m^2}} = \frac{\ln \left[\frac{C'}{e_2} (r_2 - r_m) \right]}{\ln \left[\frac{C'}{e_1} (r_m - r_1) \right]},$$

in cui si assume una scabrezza assoluta diversa per la parete interna e per la parete esterna. In particolare per $e_1 = e_2$, si ottiene:

$$\sqrt{\frac{\beta^2 - \alpha^2}{\alpha(1 - \beta^2)}} = \frac{\ln \left[\frac{C'}{2} \frac{1 - \beta}{1 - \alpha} \frac{4R}{e} \right]}{\ln \left[\frac{C'}{2} \frac{\beta - \alpha}{1 - \alpha} \frac{4R}{e} \right]}.$$

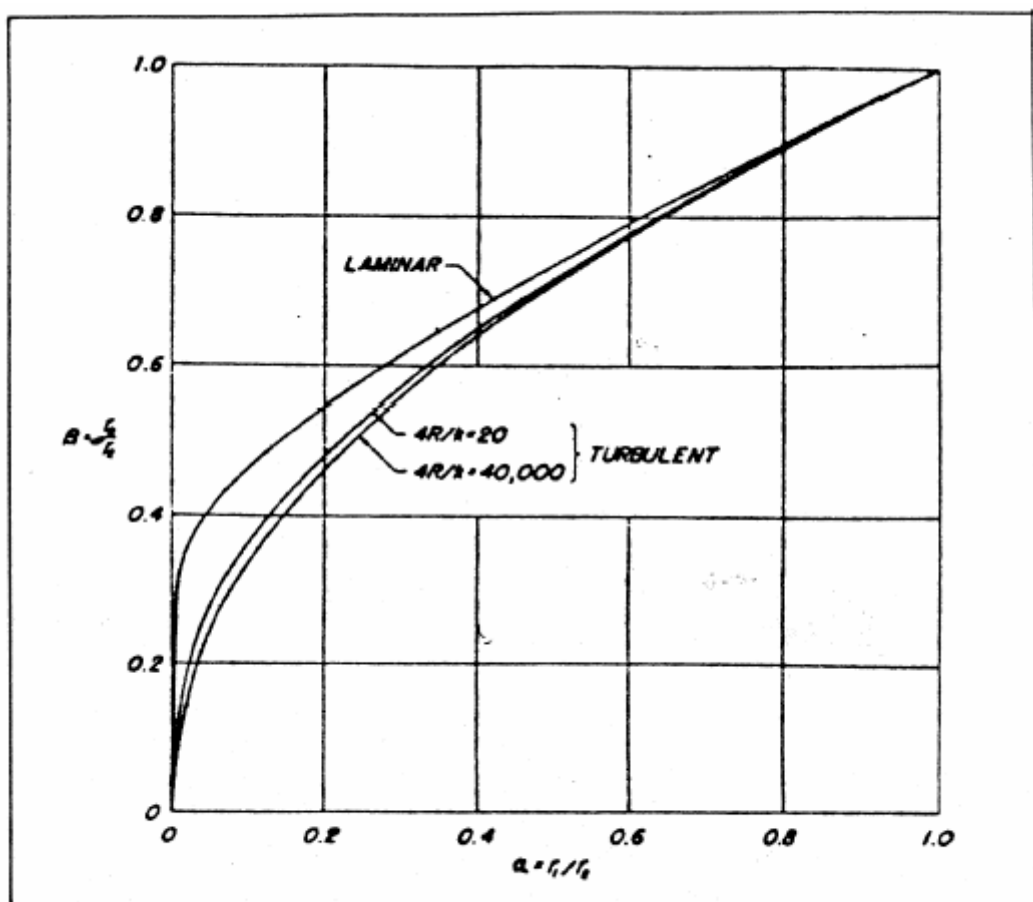


Fig. 45. Posizione relativa del massimo di velocità in funzione del rapporto dei raggi interno ed esterno per moto completamente turbolento.

avendo indicato con $R=(r_2-r_1)/2$, il raggio idraulico.

In fig. (45) si riporta β in funzione di α al variare della scabrezza relativa $\epsilon/(4R)$.

Nel caso di moto turbolento di transizione è noto che i coefficienti C_1 e C_2 delle leggi di velocità sono funzioni di $u_* \epsilon / \nu$. In questo caso, ipotizzando ancora $\epsilon_1 = \epsilon_2$, si ottiene:

$$\sqrt{\frac{\beta^2 - \alpha^2}{\alpha(1 - \beta^2)}} = \frac{\ln\left[\frac{C_2}{2} \left(\frac{1 - \beta}{1 - \alpha}\right) \frac{4R}{\epsilon}\right]}{\ln\left[\frac{C_1}{2} \left(\frac{\beta - \alpha}{1 - \alpha}\right) \frac{4R}{\epsilon}\right]}.$$

Le espressioni prima riportate per il calcolo del raggio di massimo di velocità non sono in forma esplicita. Nel 1971 Doshi e Gill [14] proposero un'altra legge per il calcolo del raggio di massimo di velocità, con lo scopo di ottenere una soluzione in forma esplicita e di facile impiego. Integrando

l'equazione del momento della quantità di moto e applicando una serie di semplificazioni, Doshi e Gill pervennero alla seguente relazione:

$$\beta^3 = \frac{\alpha}{2} (1 + \alpha), \quad (86)$$

avendo indicato, al solito $\alpha = r_1/r_2$ e $\beta = r_m/r_2$. Gli autori considerano l'equazione (86) valida per tutti i flussi turbolenti completamente sviluppati in condotti anulari. In fig. (46) si riporta l'andamento di β in funzione di α secondo Doshi e Gill.

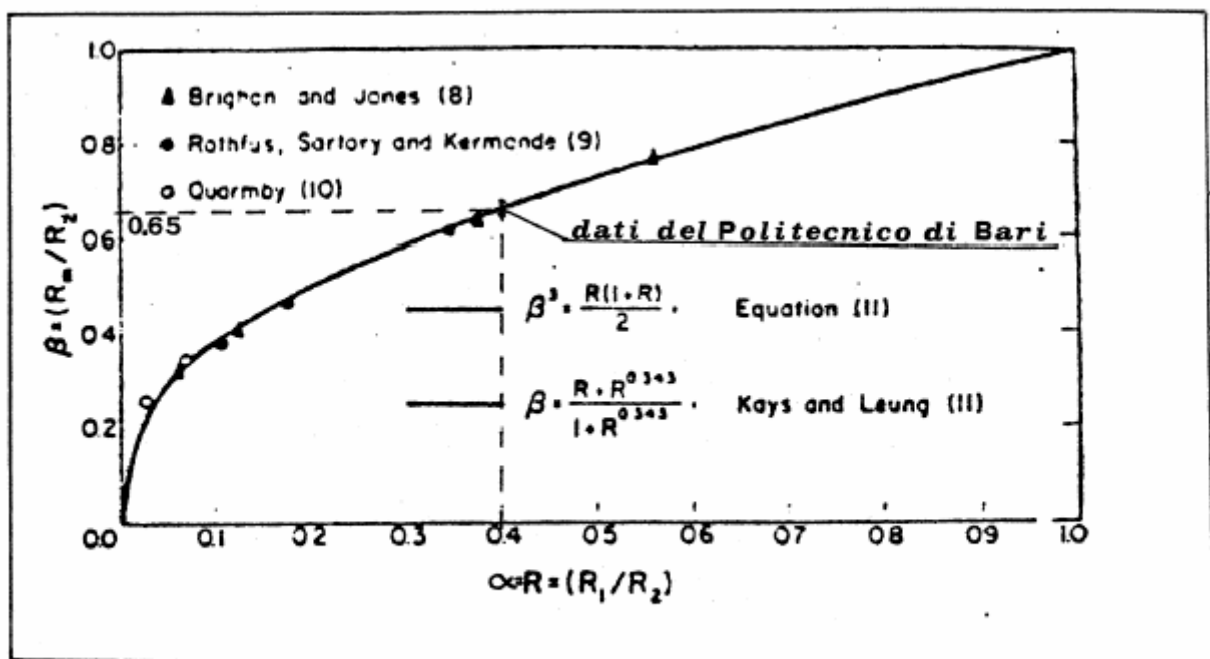


Fig. 46. Posizione del massimo di velocità secondo Doshi e Gill.

4.5 Leggi di resistenza per condotti a sezione retta anulare concentrica

Macagno e McDougall [27] pervennero a delle leggi di resistenza per condotti anulari lisci e scabri attraverso l'integrazione della legge di velocità logaritmica di Prandtl-Von Karman. In altri termini, gli Autori partono dal presupposto di applicabilità della legge logaritmica di velocità, con i coefficienti propri dei condotti a sezione circolare, sia per la zona interna che per la zona esterna dei condotti anulari, ammettendo che fino ad allora (maggio 1966) non era a Loro conoscenza alcuna proposta sostitutiva della legge di Prandtl-Von Karman. In effetti, secondo gli stessi Autori, in

letteratura ([4] e [30]) erano già presenti lavori in cui si applicavano leggi di velocità tipo quella di Prandtl-Von Karman per condotti anulari.

Facendo riferimento ai simboli introdotti nel paragrafo precedente, la legge di resistenza per condotti anulari lisci è, secondo gli Autori, la seguente:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = \frac{A}{4\sqrt{2}} \left[\frac{1-\beta^2}{1-\alpha} \right]^{1/2} \{ 2 \ln \left[\frac{C}{4\sqrt{2}} \left(\frac{1-\beta^2}{1-\alpha} \right)^{1/2} \left(\frac{1-\beta}{1-\alpha} \right) Re\sqrt{\lambda} \right] + \right. \\ \left. - \left[\frac{\beta^2-\alpha^2}{\alpha(1-\beta^2)} \right]^{1/2} \frac{\beta-\alpha}{1-\alpha^2} (3\alpha+\beta) - \frac{1-\beta}{1-\alpha^2} (3+\beta) \} \right\}. \quad (87)$$

L'equazione (87) può essere sintetizzata nel seguente modo:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = M_s \ln(Re\sqrt{\lambda}) + L_s,$$

dove i coefficienti M_s e L_s sono riportati in fig. (47).

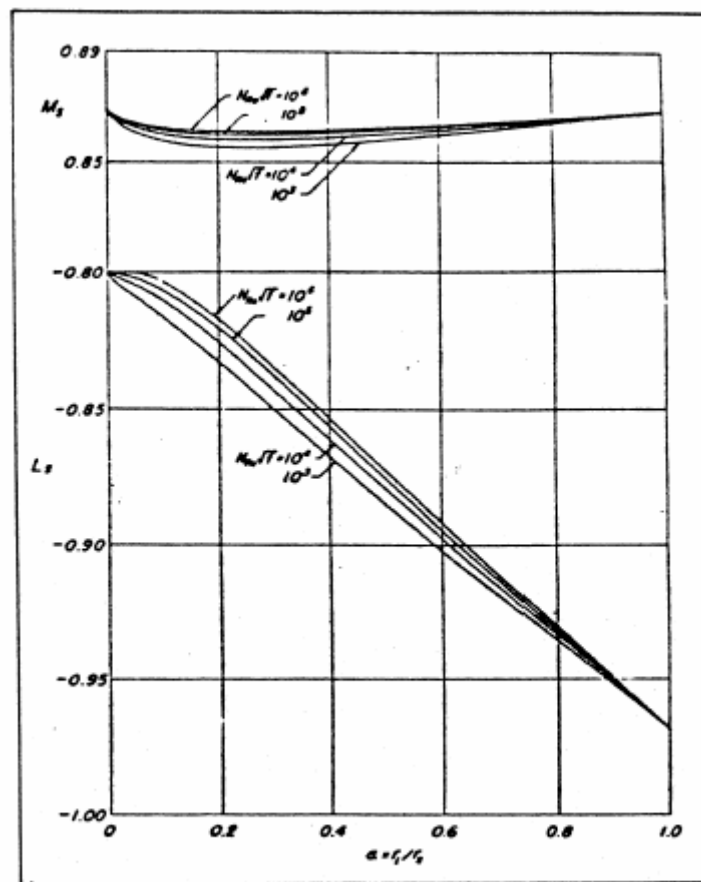


Fig. 47. Diagrammi di M_s e L_s (condotto idraulicamente liscio).

Dalla relazione $J = \lambda_1 U_1^2 / (2g4R_1) = \lambda_2 U_2^2 / (2g4R_2) = \lambda U^2 / (2g4R)$ è possibile ricavare λ_1 e λ_2 , essendo questi i coefficienti di resistenza, rispettivamente, della zona interna ed esterna del flusso ed avendo indicato con pedice 1 e 2 rispettivamente le grandezze relative alla zona interna ed esterna:

$$Re_1 \sqrt{\lambda_1} = \left[\frac{\beta^2 - \alpha^2}{\alpha(1-\alpha)} \right]^{3/2} Re \sqrt{\lambda} \quad (88)$$

$$Re_2 \sqrt{\lambda_2} = \left[\frac{1-\beta^2}{1-\alpha} \right]^{3/2} Re \sqrt{\lambda}. \quad (89)$$

Si osserva che il calcolo di λ_1 e λ_2 , secondo le (88) e (89), non può prescindere dalla conoscenza di λ .

Nel caso di moto assolutamente turbolento, gli autori ricavano la seguente legge di resistenza:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{\lambda}} = & \frac{A}{4\sqrt{2}} \left[\frac{1-\beta^2}{1-\alpha} \right]^{1/2} \left\{ 2 \ln \left[\frac{C'}{2} \left(\frac{1-\beta}{1-\alpha} \right) \frac{4R}{e} \right] + \right. \\ & \left. - \left[\frac{\beta^2 - \alpha^2}{\alpha(1-\beta^2)} \right]^{1/2} \frac{\beta - \alpha}{1-\alpha^2} (3\alpha + \beta) - \frac{1-\beta}{1-\alpha^2} (3+\beta) \right\}. \end{aligned} \quad (90)$$

Anche la (90) può essere sintetizzata nel seguente modo:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = M_r \ln \frac{4R}{e} + L_r,$$

in cui le espressioni di M_r e L_r , funzioni di α e $4R/e$, sono diagrammate in fig. (48).

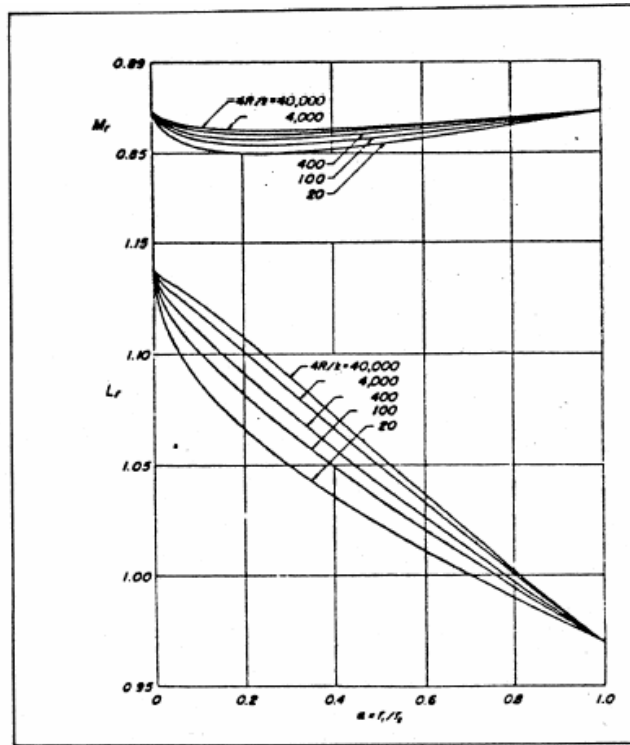


Fig. 48. Diagrammi di M_r e L_r (moto assolutamente turbolento).

Le equazioni per gli indici di resistenza della zona interna ed esterna sono, in questo caso:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} = \frac{A}{4\sqrt{2}} \left\{ 2 \ln \left[\frac{C'}{2} \left(\frac{\beta - \alpha}{1 - \alpha} \right) \frac{4R}{e} \right] - \frac{3\alpha + \beta}{\alpha + \beta} \right\}$$

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda_2}} = \frac{A}{4\sqrt{2}} \left\{ 2 \ln \left[\frac{C'}{2} \left(\frac{1 - \beta}{1 - \alpha} \right) \frac{4R}{e} \right] - \frac{3 + \beta}{1 + \beta} \right\}.$$

Per quanto attiene il moto di transizione, gli Autori propongono:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{\lambda}} = & \frac{A}{4\sqrt{2}} \left[\frac{1 - \beta^2}{1 - \alpha} \right]^{1/2} \left\{ 2 \ln \left[\frac{C_2}{2} \left(\frac{1 - \beta}{1 - \alpha} \right) \frac{4R}{e} \right] + \right. \\ & \left. - \left[\frac{\beta^2 - \alpha^2}{\alpha(1 - \beta^2)} \right]^{1/2} \frac{\beta - \alpha}{1 - \alpha^2} (3\alpha + \beta) - \frac{1 - \beta}{1 - \alpha^2} (3 + \beta) \right\}. \end{aligned}$$

Le espressioni precedentemente riportate sono diagrammate in fig. (49).

Macagno e McDougall non forniscono le analoghe espressioni per il caso di ϵ_1 diverso da ϵ_1 , ma osservano che, in queste situazioni, non si può effettuare una progettazione sulla base di un valor

medio di una grandezza di convenienza, ma andrebbe sviluppato l'intero procedimento qui presentato per il caso di scabrezze assolute uguali per entrambe le pareti.

A questo punto, va messo in evidenza che le leggi di resistenza proposte da Macagno e McDougall sono in grado

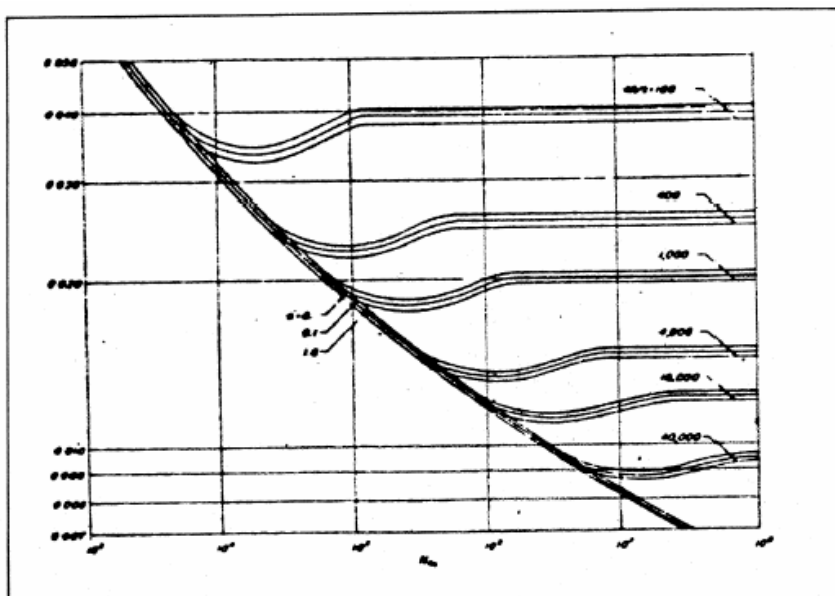


Fig. 49. Indici di resistenza per condotti anulari secondo Macagno e McDougall (1966).

di fornire l'indice di resistenza con errori che si possono considerare piccoli. Tuttavia, gli stessi Autori considerano queste leggi come una base per ulteriori ricerche, sia teoriche che pratiche.

5 ESPERIENZE DI LABORATORIO

5.1 Descrizione dell'apparato sperimentale

La sperimentazione è stata sviluppata su un condotto anulare liscio nel Laboratorio dell'Istituto di Idraulica e Costruzioni Idrauliche del Politecnico di Bari.

La tubazione esterna è costituita da una condotta in plexiglas (PMMA estrusi trasparenti) i cui diametri effettivi interno ed esterno sono, rispettivamente, 150mm e 160mm. L'anima interna è costituita da una condotta in PVC di diametro effettivo esterno di 60 mm. L'anima interna è bloccata e centrata tramite viti poste a 120°, situate in corrispondenza della sezione iniziale e finale. La lunghezza del condotto descritto è di 2.050 m, preceduto e seguito da un condotto anulare, la cui anima è sempre in PVC, mentre la superficie esterna è in acciaio zincato (Dalmine UNI 4148 SS UNI 5745) di diametro effettivo di 152.5 mm. Il tratto a monte del condotto liscio ha una lunghezza di 10.50 m, mentre il tratto a valle di 7.18 m. Per una più completa descrizione del sistema di condotte si faccia riferimento alla fig. (50).

L'installazione sperimentale si trova in derivazione, tramite l'interposizione di una saracinesca, con una condotta alimentata da una vasca a livello costante posta alla quota superiore della torre di carico, garantendo all'origine un carico di circa 18 m.

La vasca a livello costante è alimentata da una pompa che pesca nella vasca di aspirazione, dove si raccoglie l'acqua proveniente dalla cabaletta di scarico.

Per la misura delle portate si è fatto uso di una lente inserita a monte dell'apparato sperimentale, tarata con metodo volumetrico.

Per la determinazione delle perdite di carico sono state predisposte, nel tratto di prova, lungo 2.050 m, due prese, distanti tra loro 1.77 m, collegate, mediante tubi flessibili di plastica, ad un manometro differenziale ad acqua dotato di nonio decimale.

Per i rilievi di velocità si è fatto uso di un ago ipodermico di diametro esterno di 2 mm e interno di 1.75 mm, inserito nella sezione anulare attraverso un apposito foro a tenuta, realizzato sulla generatrice superiore della condotta esterna. Questo sistema ha consentito di effettuare le

misurazioni di velocità dalla parete interna fino a 7.9 mm dalla parete esterna, in quanto la fattura stessa della sonda, non consente di rilevare i valori di velocità oltre quella distanza. La presa dinamica del tubo di Pitot e quella statica sono state collegate, tramite tubi di plastica flessibili, ad un manometro differenziale del tipo precedentemente descritto.

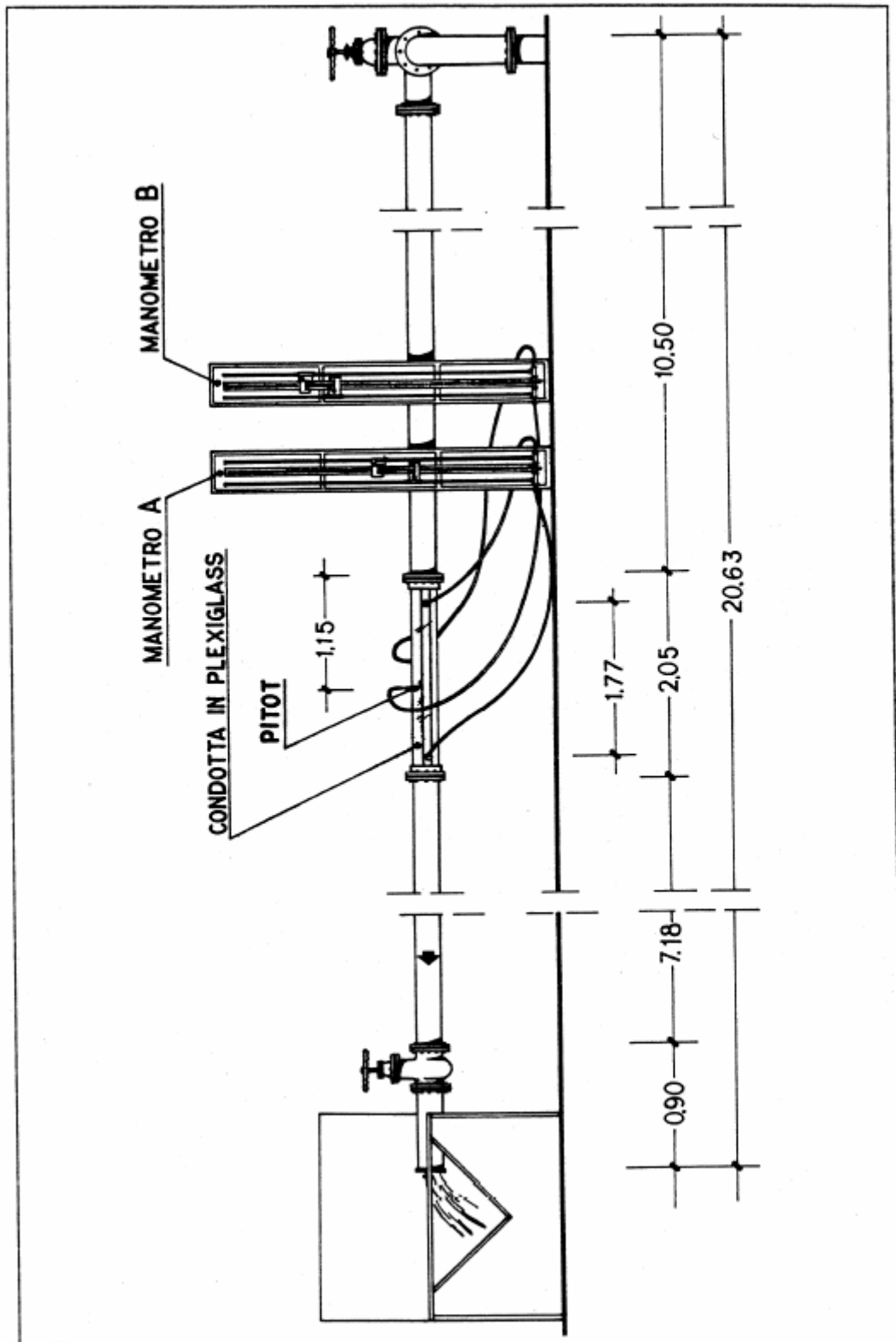


Fig. 50. Rappresentazione schematica dell'installazione sperimentale.

Ogni qualvolta si iniziava un'esperienza si seguiva la seguente prassi. Dopo aver avviata la pompa, che alimenta la vasca della torre di carico, si regolava la portata agendo sulle saracinesche di valle e di monte dell'apparato sperimentale. Quindi, si attendeva che si raggiungesse la condizione di regime e si provvedeva ad espellere l'aria della tubazione in corrispondenza delle prese statica e dinamica del Pilot. Si leggevano i valori di pressione statica e dinamica, mentre, ad opportuni intervalli di tempo, si misurava la temperatura dell'acqua nella vasca di scarico, con l'ausilio di un termometro a mercurio in grado di valutare il decimo di grado Celsius.

5.2 Indagini effettuate

Sono state effettuate misurazioni di velocità con valori di portata di 20, 30, 40, 50, 60 l/s, per un totale di cinque configurazioni.

Il corrispondente range di variabilità del numero di Reynolds è $100000 \div 300000$.

Nell'appendice C, per ciascuna configurazione esaminata, sono riportati i valori delle velocità rilevate.

5.2.1 Posizione della velocità massima

Nella fig. (51) sono riportati i punti sperimentali relativi alle misure di velocità effettuate per i diversi valori di portata.

La figura mette in evidenza che il massimo di velocità è più vicino alla parete interna. In particolare si ha che il raggio in cui si ha il massimo di velocità è in buon accordo con quanto previsto dalla relazione di Doshi e Gill. Applicando, infatti, l'equazione (86), si ottiene $r_m = 48.8$ mm.

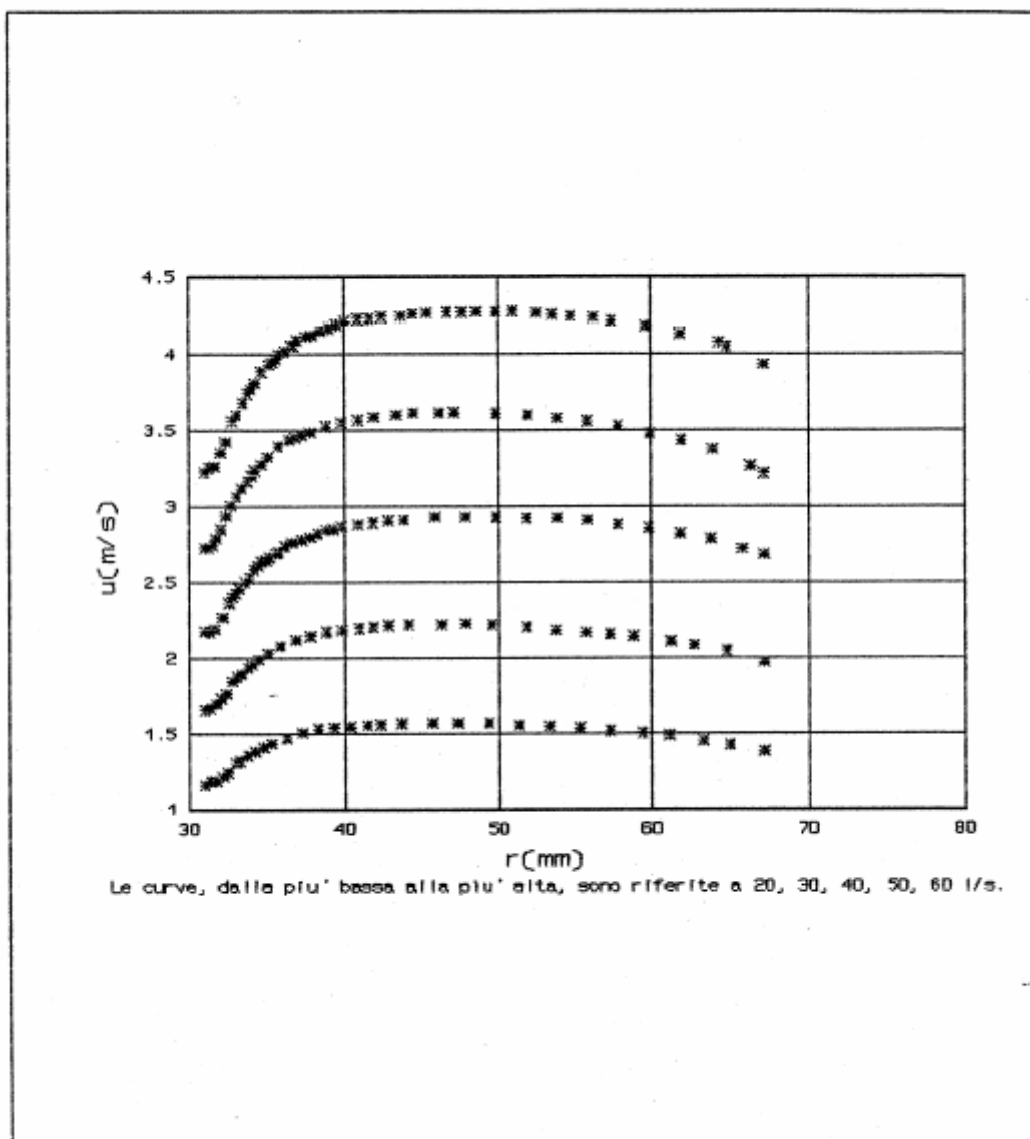


Fig. 51. Profili sperimentali di velocità.

La posizione dei punti sperimentali mostra, inoltre, che i diagrammi di velocità si appiattiscono tanto più quanto minore è la portata.

In fig. (52) si riporta l'andamento delle velocità adimensionalizzate con quella massima. Dalla figura si nota che i dati rilevanti nella zona che va dalla sezione di massima velocità alla parete interna danno luogo a diagrammi sovrapposti, mentre verso la parete esterna vi è una discreta dispersione.

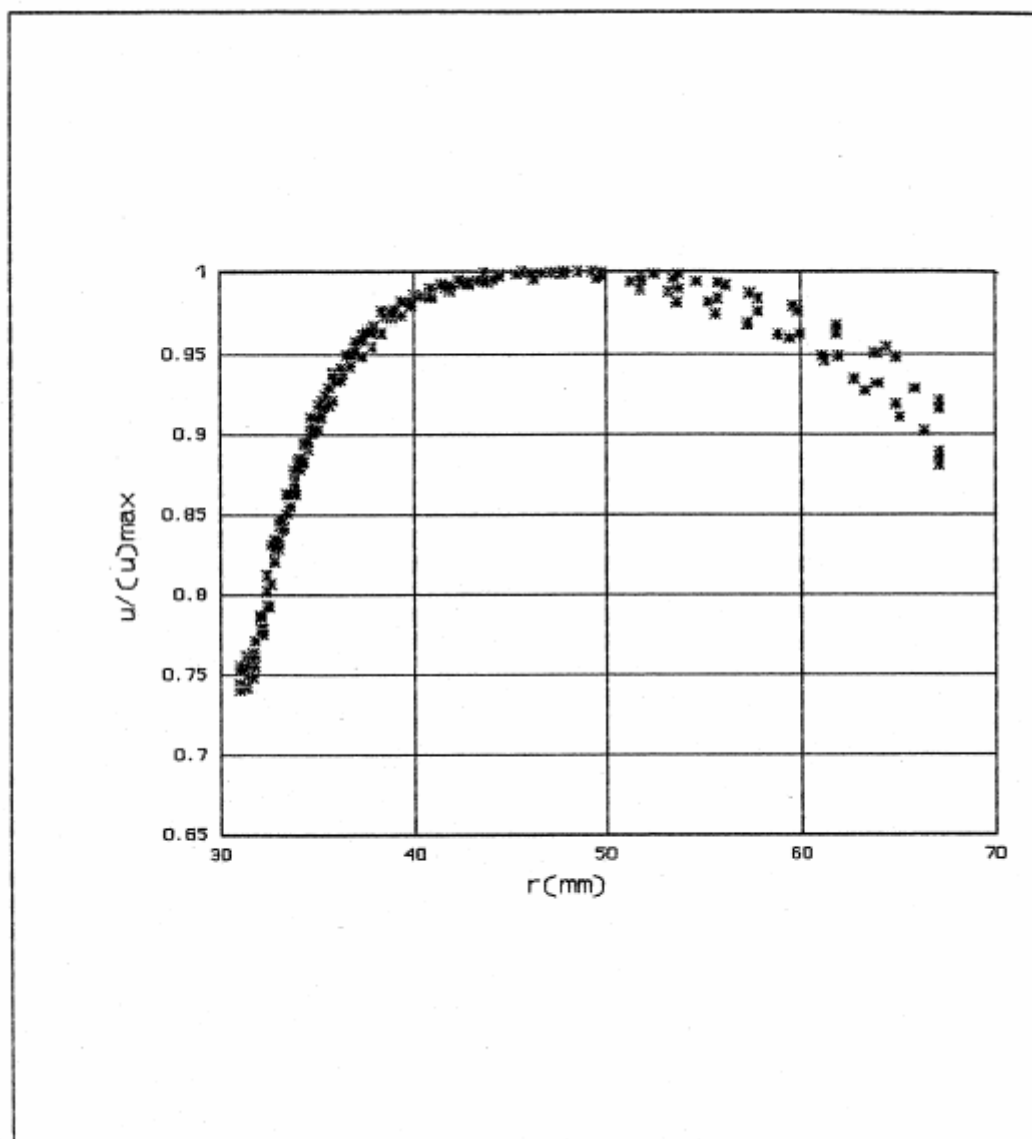


Fig. 52. Distribuzione adimensionale della velocità.

5.2.2 Dati e diagrammi di velocità

Si presentano le schede di dati e i diagrammi di velocità per le singole configurazioni analizzate in laboratorio.

Portata 20 l/s.

Q [l/s]	Re	J
20	99944	0.0225
V [m/s]	τ_{01} [N/mq]	τ_{02} [N/mq]
1.35	4.964	5.454
τ_{01} [N/mq]	u_{t1} [m/s]	u_{t2} [m/s]
4.856	0.0738	0.0700

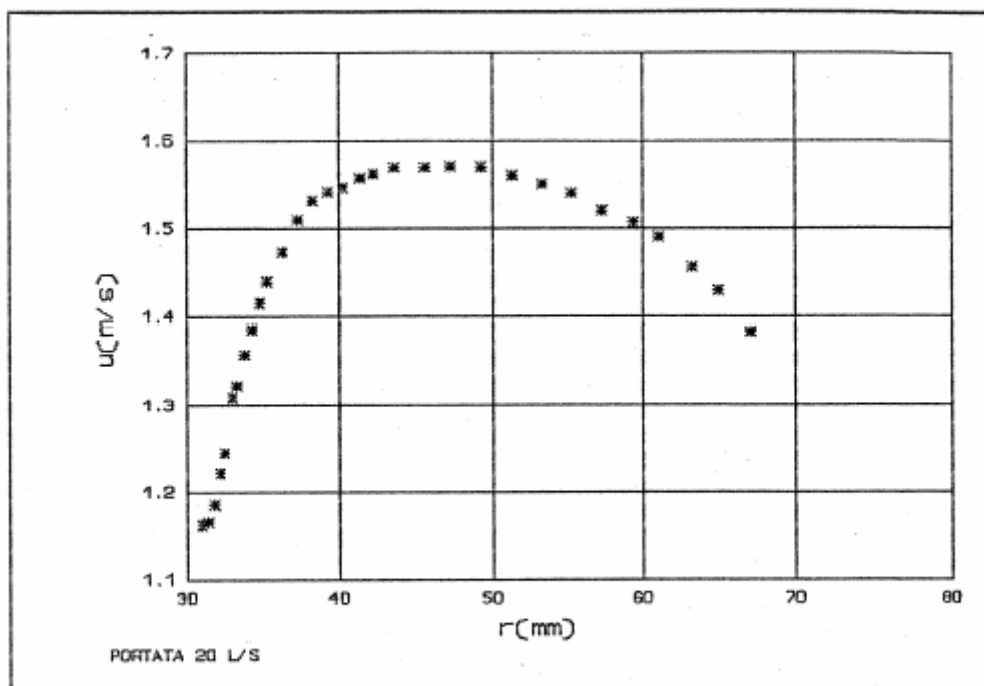


Fig. 53. Diagramma di velocità in scale lineari.

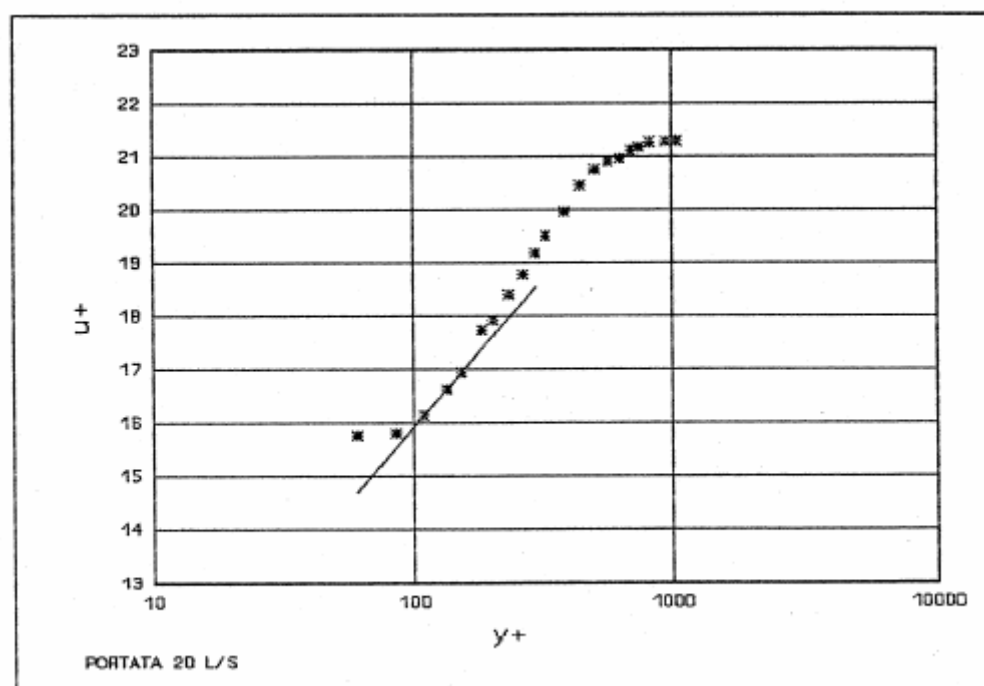


Fig. 54. Diagramma logaritmico di velocità per la zona interna, con legge di parete.

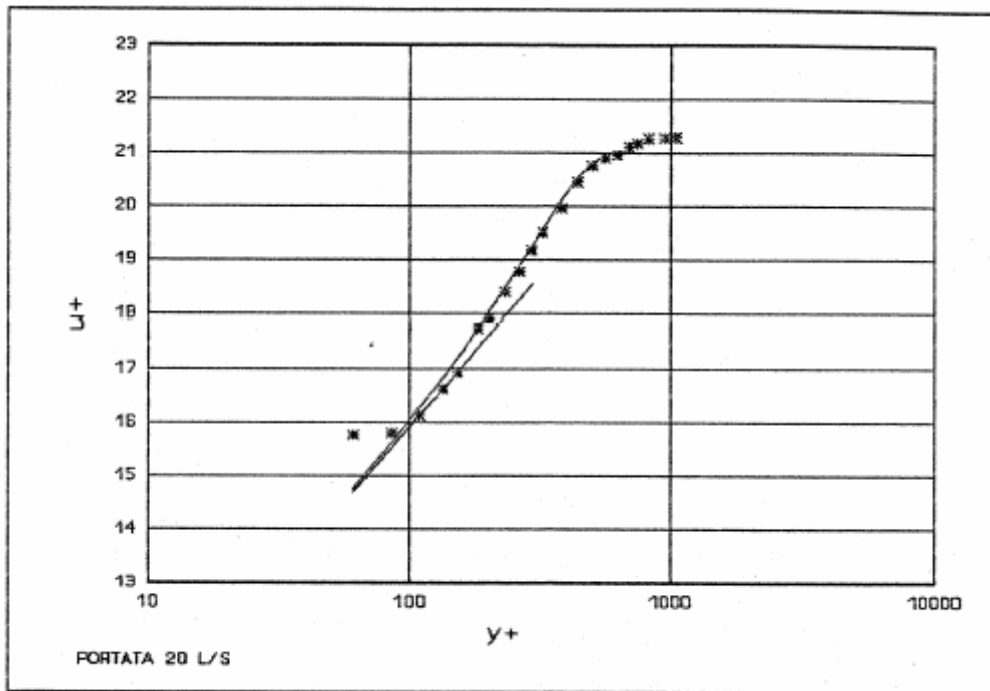


Fig. 55. Diagramma logaritmico di velocità per la zona interna, con legge di Coles.

In fig. (54) è anche riportata la legge di parete:

$$\frac{u}{u_{*1}} = 4.71 + 5.61 \log \left(\frac{y u_{*1}}{\nu} \right).$$

In fig. (55) si è riportata la legge di Coles:

$$\frac{u}{u_{*1}} = 4.71 + \frac{2.3}{k} \log \left(\frac{y u_{*1}}{\nu} \right) + \frac{\Pi}{k} 2 \sin^2 \left(\frac{\pi y}{2 \delta} \right),$$

essendo, nel caso specifico, $k=0.41$, $\Pi=0.22$, $\delta=7.3$ mm.

Portata 30 l/s.

Q [l/s]	Re	J
30	150285	0.0400
V [m/s]	τ_{02} [N/mq]	τ_{01} [N/mq]
2.03	8.829	9.575
τ_{02} [N/mq]	u_{t1} [m/s]	u_{t2} [m/s]
8.633	0.0978	0.0930

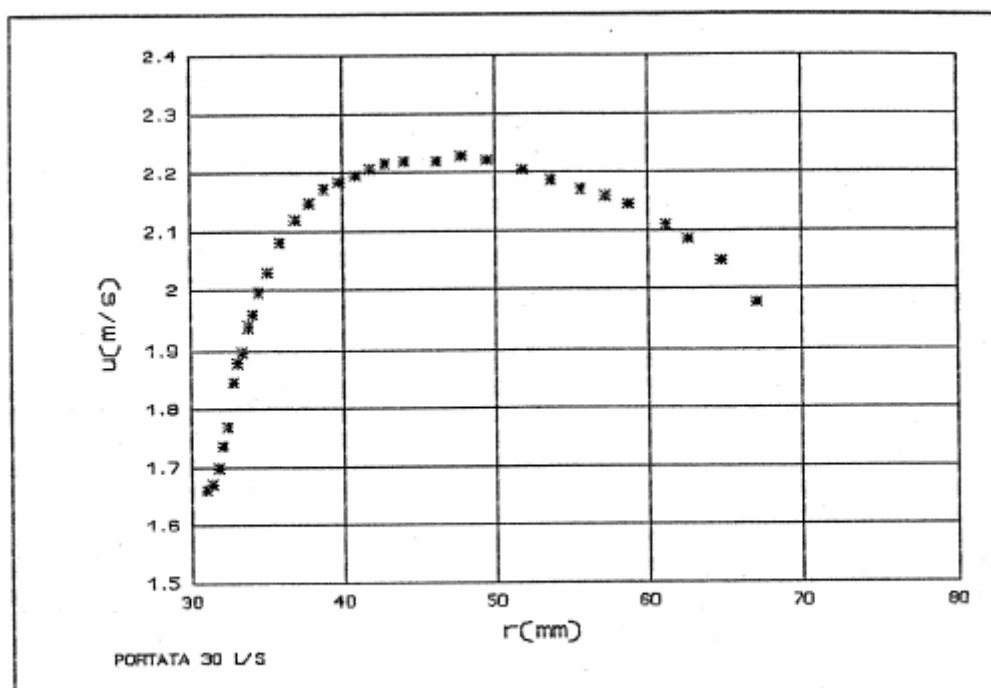


Fig. 56. Diagramma di velocità in scale lineari.

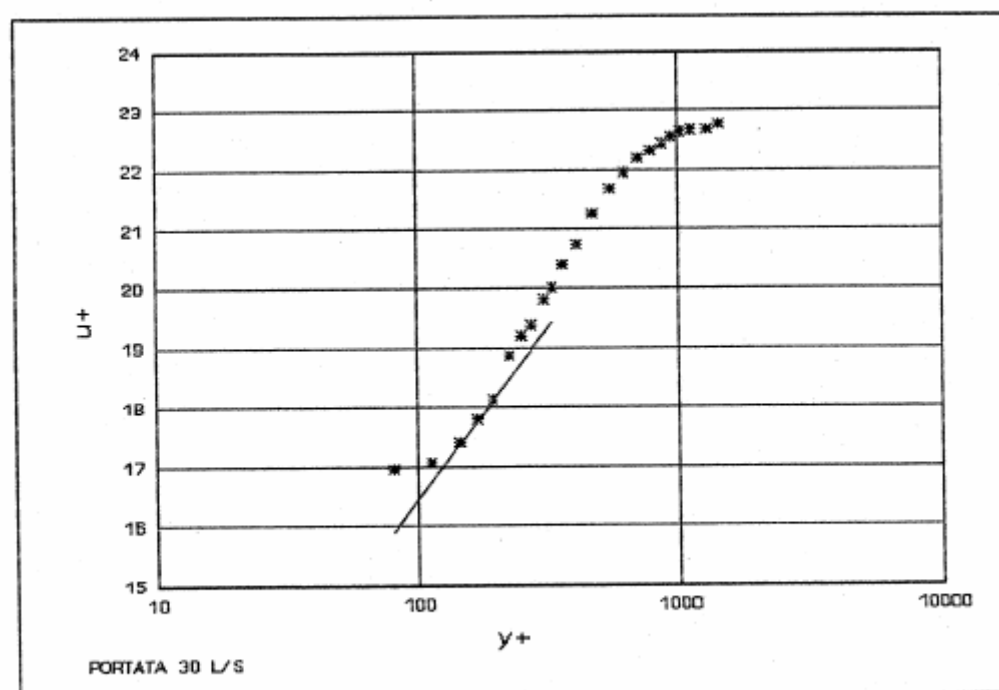


Fig. 57. Diagramma logaritmico di velocità per la zona interna, con legge di parete.

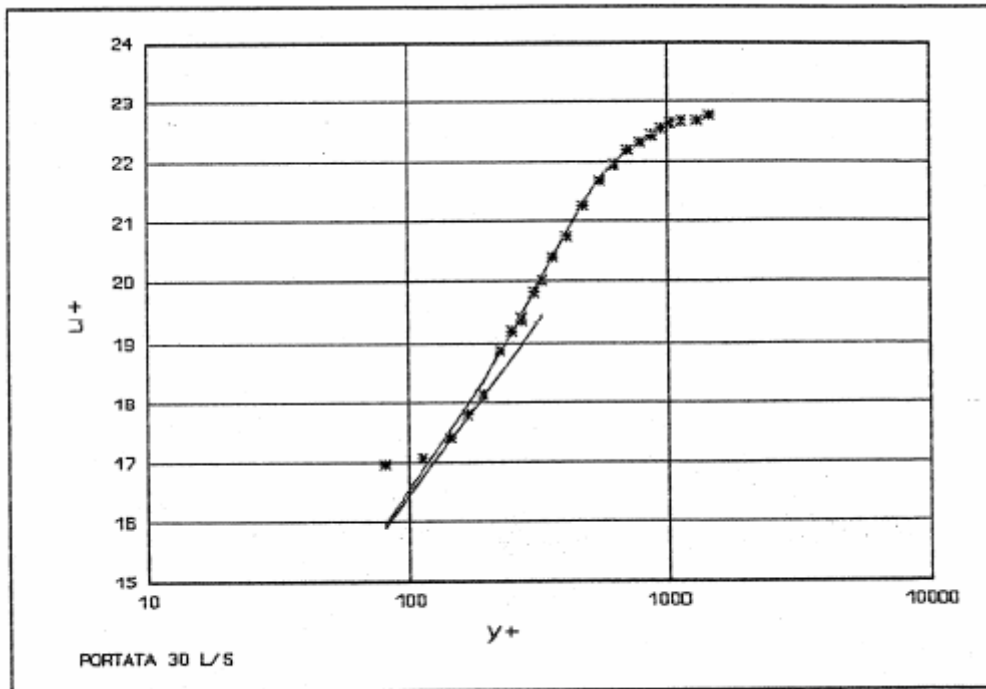


Fig. 58. Diagramma logaritmico di velocità per la zona interna, con legge di Coles.

In fig. (57) la legge di parete è di equazione:

$$\frac{u}{u_{+1}} = 4.96 + 5.76 \log \left(\frac{y u_{+1}}{\nu} \right).$$

In fig. (58) la legge di Coles è la seguente:

$$\frac{u}{u_{+1}} = 4.96 + \frac{2.3}{k} \log \left(\frac{y u_{+1}}{\nu} \right) + \frac{\Pi}{k} 2 \sin^2 \left(\frac{\pi}{2} \frac{y}{\delta} \right),$$

essendo $k=0.40$, $\Pi=0.20$, $\delta=6.9$ mm.

Portata 40 l/s.

Q [l/s]	Re	J
40	199887	0.0620
V [m/s]	τ_{0a} [N/mq]	τ_{01} [N/mq]
2.70	13.685	15.107
τ_{02} [N/mq]	u_{+1} [m/s]	u_{+2} [m/s]
13.342	0.123	0.115

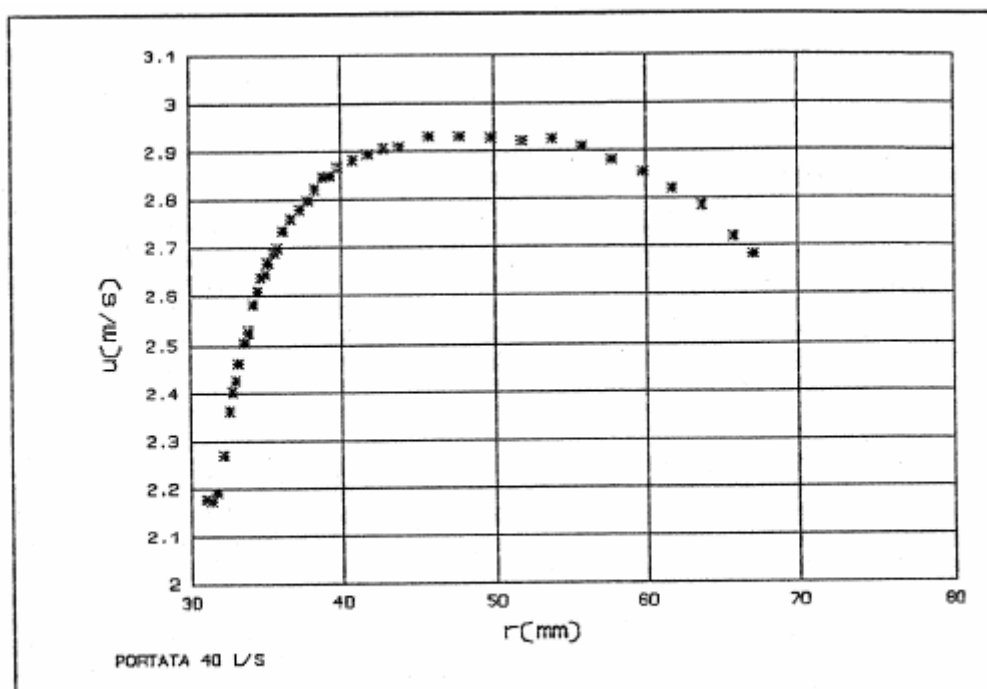


Fig. 59. Diagramma di velocità in scale lineari.

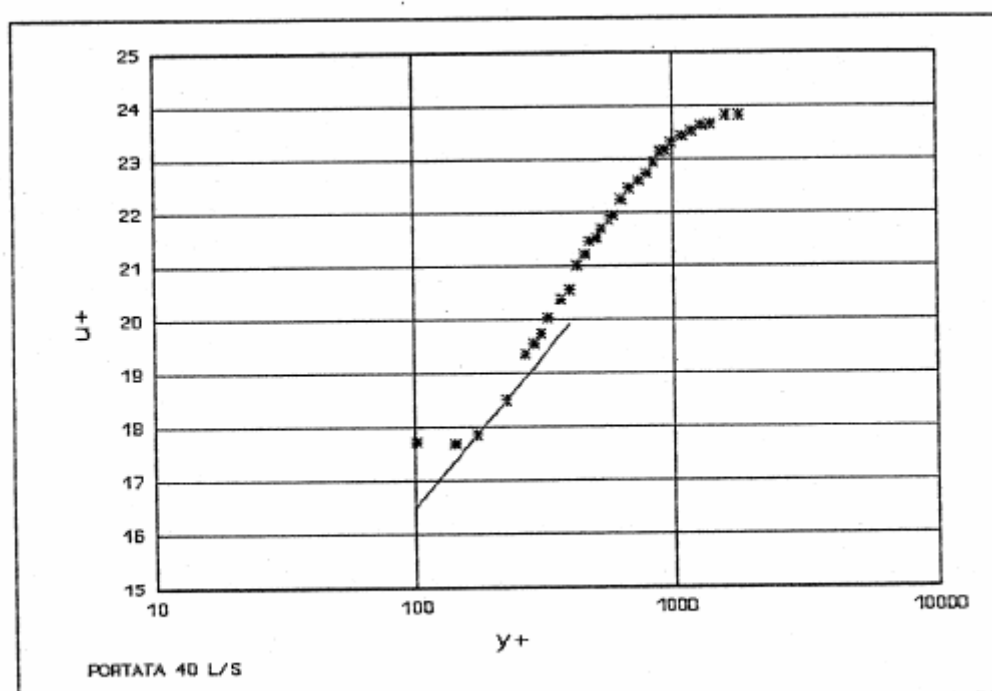


Fig. 60. Diagramma logaritmico di velocità per la zona interna, con legge di parete.

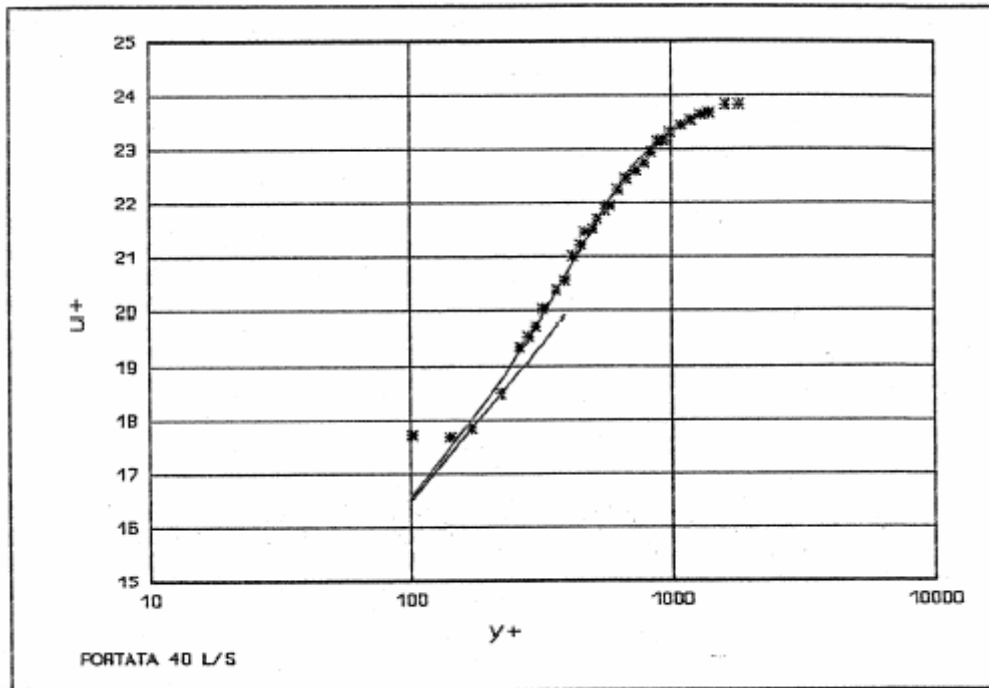


Fig. 61. Diagramma logaritmico di velocità per la zona interna, con legge di Coles.

In fig. (60) la legge di parete è la seguente:

$$\frac{u}{u_{*1}} = 5.02 + 5.74 \log \left(\frac{y u_{*1}}{\nu} \right).$$

In fig. (61) è rappresentata la legge di Coles:

$$\frac{u}{u_{*1}} = 5.02 + \frac{2.3}{k} \log \left(\frac{y u_{*1}}{\nu} \right) + \frac{\Pi}{k} 2 \sin^2 \left(\frac{\pi y}{2 \delta} \right),$$

essendo $k=0.40$, $\Pi=0.25$, $\delta=7.3$ mm.

Portata 50 l/s.

Q [l/s]	Re	J
50	250229	0.0935
V [m/s]	τ_{02} [N/mq]	τ_{01} [N/mq]
3.38	20.640	22.955
τ_{02} [N/mq]	u_{t1} [m/s]	u_{t2} [m/s]
20.209	0.151	0.140

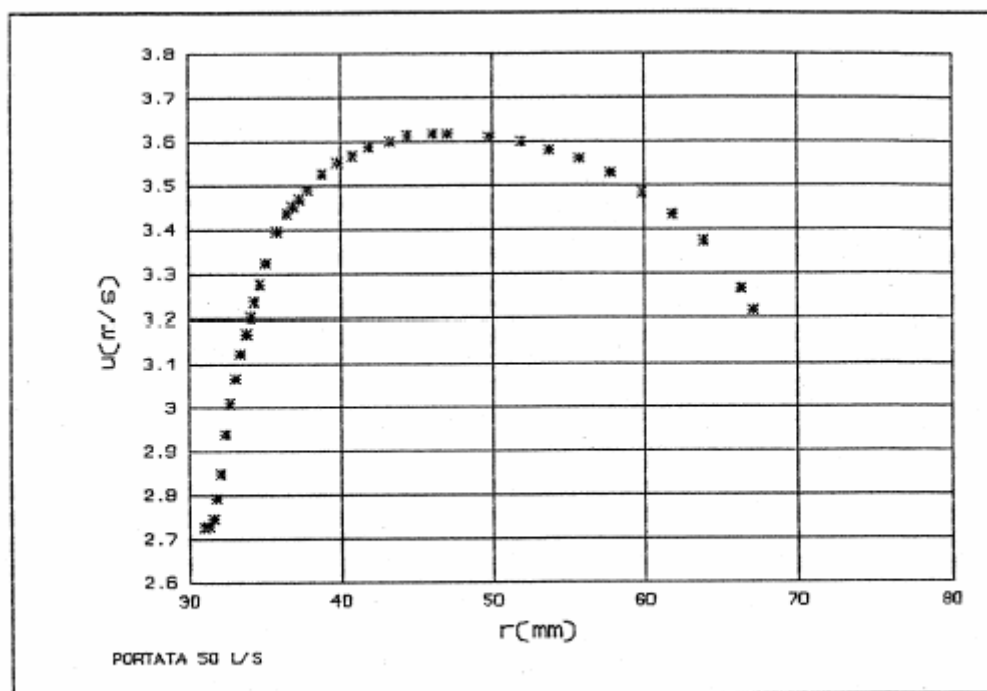


Fig. 62. Diagramma lineare di velocità.

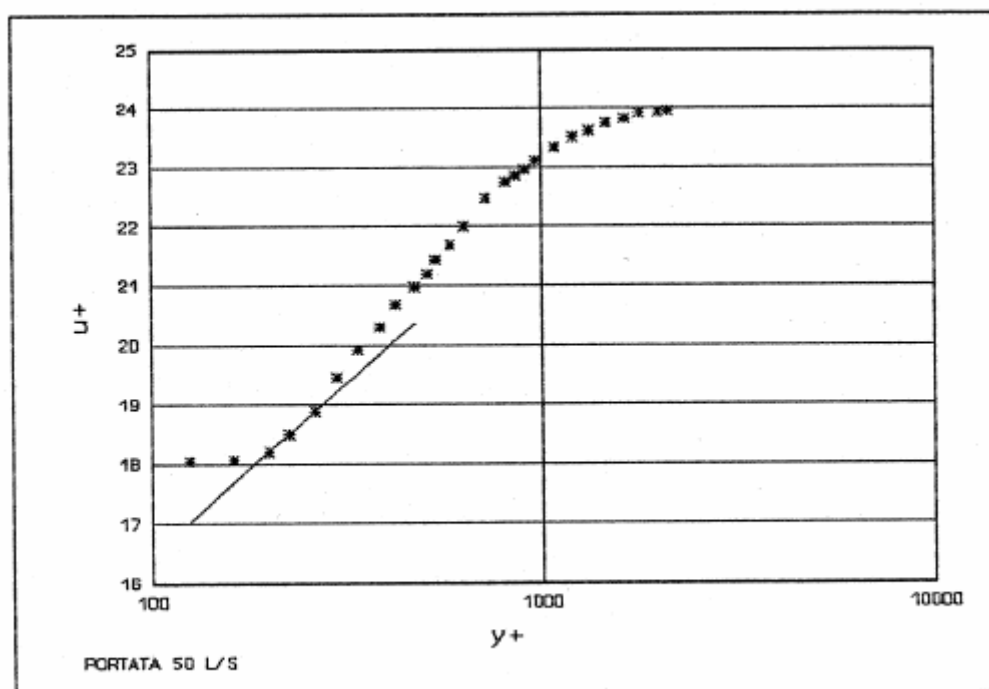


Fig. 63. Diagramma logaritmico di velocità per la zona interna, con legge di parete.

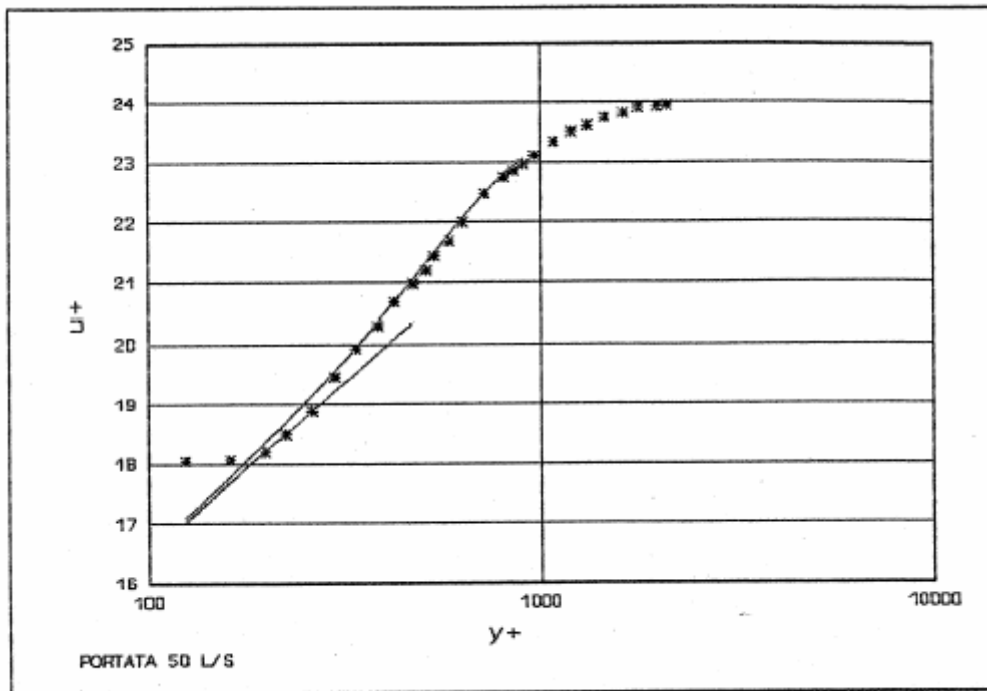


Fig. 64. Diagramma logaritmico di velocità per la zona interna, con legge di Coles.

In fig. 63 la legge di parete è la seguente:

$$\frac{u}{u_{*1}} = 5.0 + 5.75 \log \left(\frac{y u_{*1}}{\nu} \right).$$

In fig. (64) si è riportata la legge di Coles:

$$\frac{u}{u_{*1}} = 5.0 + \frac{2.3}{k} \log \left(\frac{y u_{*1}}{\nu} \right) + \frac{\Pi}{k} 2 \sin^2 \left(\frac{\pi y}{2 \delta} \right),$$

in cui $k=0.40$, $\Pi=0.22$, $\delta=6.5$ mm.

Portata 60 l/s.

Q [l/s]	Re	J
60	299831	0.130
V [m/s]	τ_{02} [N/mq]	τ_{01} [N/mq]
4.05	28.694	31.392
τ_{02} [N/mq]	u_{t1} [m/s]	u_{t2} [m/s]
28.0566	0.177	0.170

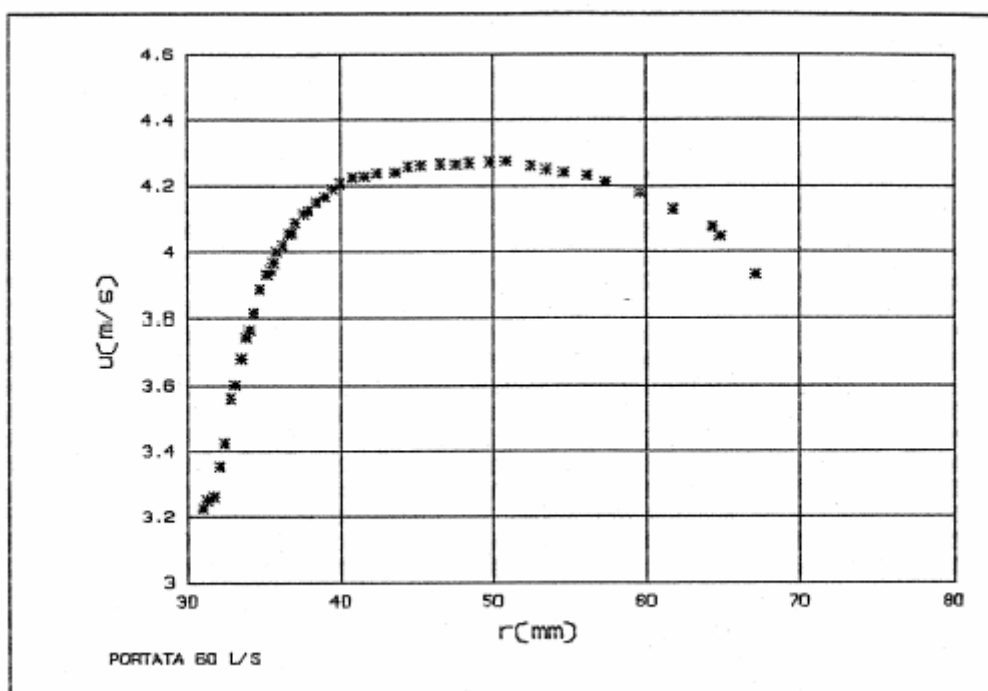


Fig. 65. Diagramma di velocità in scale lineari.

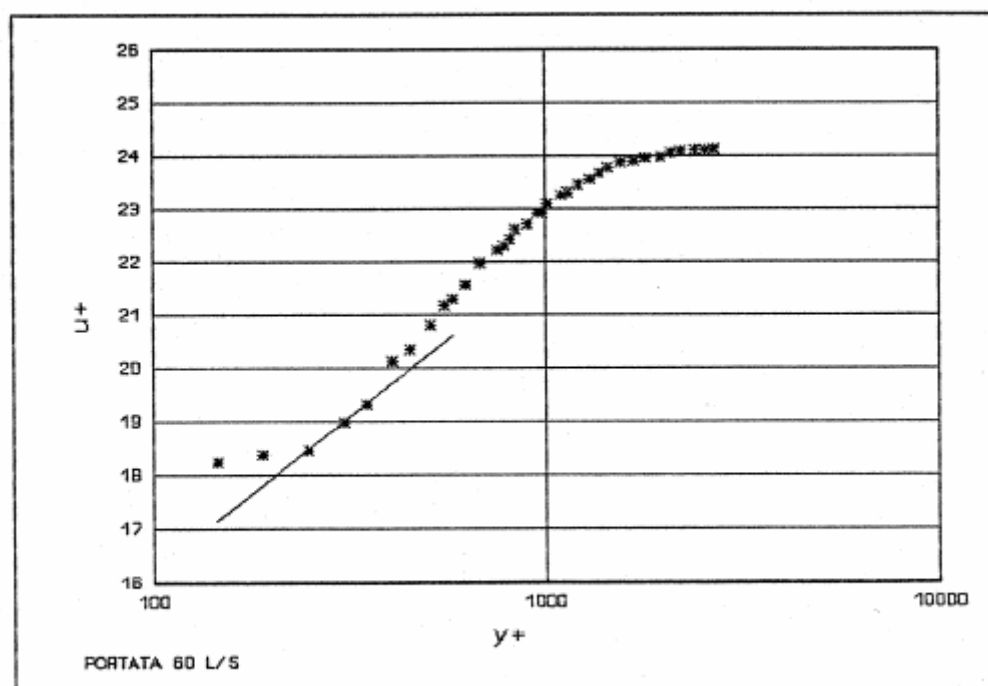


Fig. 66. Diagramma logaritmico di velocità per la zona interna, con legge di parete.

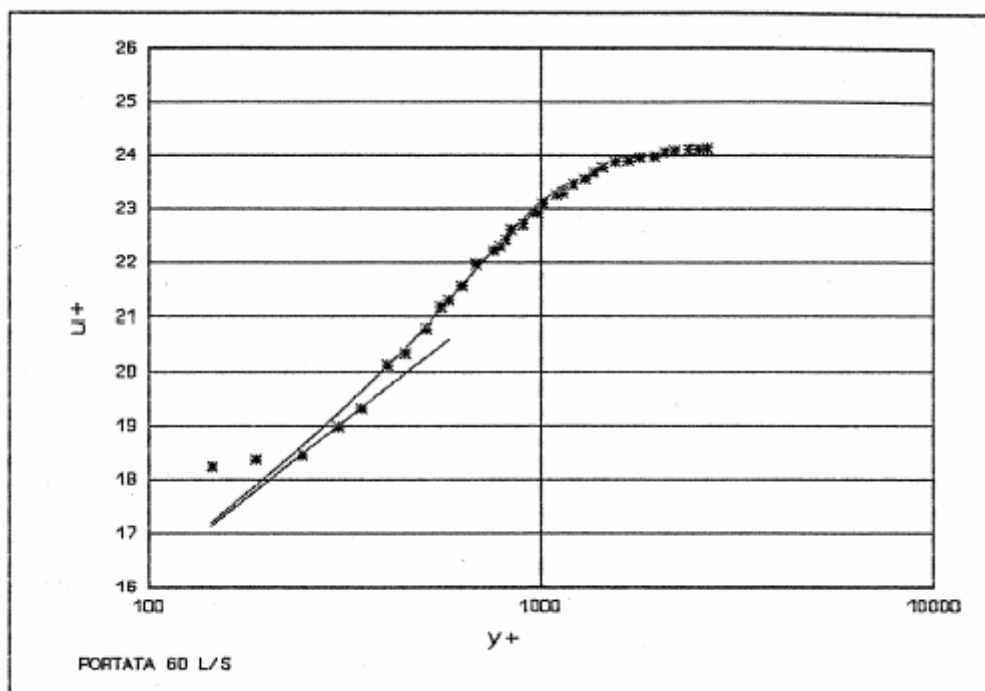


Fig. 67. Diagramma logaritmico di velocità per la zona interna, con legge di Coles.

In fig. (65) la legge di parete è la seguente:

$$\frac{u}{u_{*1}} = 4.74 + 5.74 \log \left(\frac{y u_{*1}}{\nu} \right).$$

In fig. (67) si è riportata la legge di Coles:

$$\frac{u}{u_{*1}} = 4.74 + \frac{2.3}{k} \log \left(\frac{y u_{*1}}{\nu} \right) + \frac{\Pi}{k} 2 \sin^2 \left(\frac{\pi y}{2 \delta} \right),$$

in cui $k=0.40$, $\Pi=0.23$, $\delta=7.0$ mm.

5.2.3 Considerazioni generali

Dall'analisi dei grafici precedentemente illustrati, si evince che la legge di parete, la cui zona di validità si estende dalla fine del substrato viscoso a 10-15% dello spessore dello strato di fluido che va dalla sezione di velocità massima alla parete interna, è rispettata con valori di ordinata all'origine mediante uguale a 4.89 e valori di k compresi tra 0.40 e 0.41.

Per quanto attiene la zona di scostamento dalla legge lineare, ci si è riferiti alla nota legge di Coles.

In essa la grandezza δ non è, secondo i dati sperimentali, la distanza tra il punto di massimo di velocità e la parete interna, ma tra il punto in cui si è registrato il massimo scostamento della legge

lineare e la parete interna. In effetti, le due distanze non coincidono, secondo i dati sperimentali. I valori di δ sono tutti compresi tra 7.3 e 6.5 mm.. La ragione di questo è ascrivibile ad un profilo di velocità che dopo aver assecondato la legge di Coles (ricavata, si ricorda, per strati limiti), si raccorda con il profilo di velocità che si riferisce alla zona cosiddetta esterna. Per cui la wake function di Coles descrive solo una parte dei profili di velocità.

Per quanto attiene, infine, i parametri di profilo della wake function (II), essi sono compresi tra 0.20 e 0.25.

E' indubbio che queste constatazioni meritano un'analisi più approfondita, con un'attrezzatura in grado di poter avallare le precedenti conclusioni. In particolare, si prevede di poter riesaminare i dati utilizzando un Anemometro a Laser Doppler (LDA). Sarà così interessante effettuare anche un confronto tra i due sistemi di misura.

A proposito, poi, del sistema di misura adottato, si

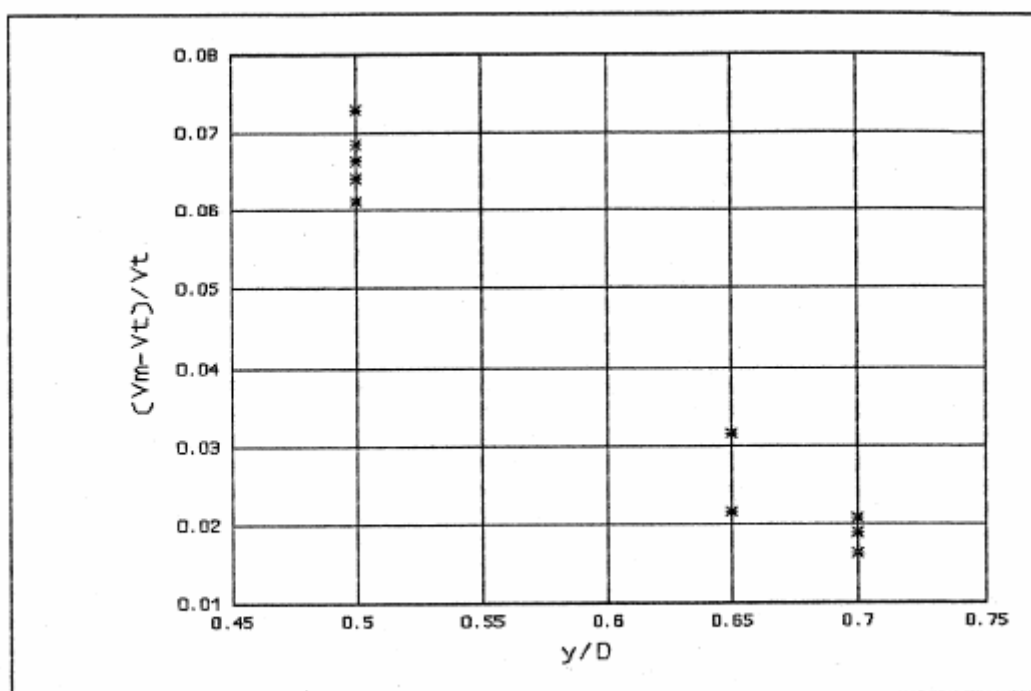


Fig. 68. Errori relativi in funzione della distanza adimensionale.

è potuto rilevare, dai diagrammi logaritmici di velocità, che i punti sperimentali vicini alla parete assumono valori più elevati di quelli teorici della legge di parete. In effetti, un tale errore sistematico nelle indicazioni piezometriche non ha consentito di fare affidamento sui primi due

punti, più vicini alla parete, di ogni configurazione. Anche i rilievi sperimentali di Viparelli ([50], [51]), di Becchi ([3]) e di Petrillo-Ranieri ([34], [35], [36]) mostrano un tale scostamento.

In fig. (68) si riporta il diagramma degli errori relativi (differenza tra velocità misurata e teorica rapportata alla velocità teorica) in funzione della distanza del Pitot della parete, adimensionalizzata con il diametro esterno della presa dinamica.

I punti che, a parità di distanza dimensionale, danno luogo a errori maggiori sono che si riferiscono ai più alti valori di stati pensionali di parete.

5.3 Applicazione della legge di resistenza di Macagno-McDougall

Si presenta una tabella in cui si riportano, in seconda colonna, i valori degli indici di resistenza calcolati con la nota relazione $\lambda = J2g4R/U^2$ utilizzando i dati sperimentali di J e U, e, in terza colonna, i valori di λ ottenuti con l'applicazione della (87). Si osserva che gli scostamenti percentuali, riportati in quarta colonna, non superano l'11% circa, con un valor medio uguale a 6.9%.

PORTATA [L/S]	λ_n	λ_c	$(\lambda_n - \lambda_c) / \lambda_n \%$
20	0.021	0.019	9.5
30	0.017	0.017	0.0
40	0.0153	0.017	-11.1
50	0.015	0.016	-6.7
60	0.014	0.015	-7.1

5.4 Analisi di una differente procedura per il calcolo delle resistenze nei condotti anulari lisci.

I rilievi sperimentali, eseguiti con il presente lavoro, sono completi solo per la zona interna del condotto anulare.

Ciò non consente di effettuare un'integrazione dei diagrammi di velocità sull'intera sezione per ottenere una legge dell'indice di resistenza dei condotti anulari lisci. Tuttavia le informazioni disponibili sono sufficienti per ricavare una diversa procedura per il calcolo delle resistenze, facendo riferimento alla metodologia individuata da E. Marchi [29].

E' fondamentale al riguardo poter ricavare il raggio del massimo di velocità a partire dal rapporto $\alpha=r_1/r_2$. A questo proposito, le esperienze condotte in laboratorio avallano la legge di Doshi e Gill, presentata nel par. 4.4. La posizione della velocità massima è importante al fine di poter individuare una superficie cilindrica a sezione circolare, lungo la quale è possibile ipotizzare che le tensioni tangenziali si annullino. Questa superficie separa l'interno flusso del condotto anulare in due zone, che si definiranno, che si definiranno interna ed esterna. La *zona interna* è quella compresa tra la velocità massima e la parete interna, mentre la zona esterna è quella rimanente. In maniera analoga si definirà un flusso interno ed un flusso esterno, caratterizzati da grandezze idrauliche che saranno interne od esterne a seconda della zona a cui si riferiscono.

I due flussi, interno ed esterno, saranno caratterizzati da differenti valori di indici di resistenza, ma, evidentemente, da un ugual valore della cadente piezometrica. L'ipotesi, dunque, di poter analizzare separatamente i due flussi consente di prescindere, in particolare, dalla zona esterna e di poter far riferimento alla zona interna, fermo restando che il valore di J è lo stesso per entrambe le zone e per il flusso interno.

Alla luce di queste considerazioni, pertanto, è possibile integrare i diagrammi di velocità della zona interna per ottenere la legge di resistenza.

In generale se la legge di velocità è del tipo:

$$u^*=a+blogy^*,$$

trascurando, in prima approssimazione, i termini correttivi proposti da Coles, Marchi ed altri AA., la (77) diviene:

$$\frac{U_1}{u_{*1}} = C_{11} - \frac{1}{k} + \frac{\beta_1}{k} + b \log \left(\frac{R_1 u_{*1}}{v} \right), \quad (91)$$

avendo indicato con U_1 la velocità media della zona interna, u_{*1} la velocità di attrito della zona interna, $R_1 = \pi(r_m^2 - r_1^2)/(2\pi r_1)$ il raggio idraulico della zona interna, ed essendo

$$\beta_1 = \ln \frac{y_{01}}{R_1} + \frac{2\pi y_{01}^2}{4\Omega_1}, \quad (92)$$

(con y_{01} si è indicata la distanza tra la parete interna e il punto di velocità massima, Ω_1 l'area della zona interna), e

$$C_{11} = \frac{1}{\Omega_1} \int_0^{y_{01}} a B_1(y) dy = \frac{1}{\Omega_1} \int_0^{y_{01}} a (2\pi r_1 + 2\pi y) dy = a, \quad (93)$$

avendo indicato con $B_1(y)$ la legge di variazione della lunghezza del contorno in funzione di y , per la zona interna.

Tenuto conto delle posizioni $J = \lambda_1 U_1^2 / (2g4R_1)$ e $u_{*1} = (R_1 J g)^{1/2}$, la (91) diviene:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} = \frac{1}{\sqrt{8}} \left(C_{11} - \frac{1+\beta_1}{k} - b \log 8\sqrt{2} \right) + \frac{b}{\sqrt{8}} \log (Re_1 \sqrt{\lambda_1}) \quad (94)$$

Per le (92) e (93) e per le posizioni $\alpha = r_1/r_2$, $\beta(\alpha) = r_m/r_2 = [\alpha(1+\alpha)/2]^{1/3}$, la (94) diviene:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} = \frac{1}{\sqrt{8}} \left[a - \frac{1}{k} \frac{3\alpha + \beta}{2(\alpha + \beta)} + b \log \frac{2\alpha}{8\sqrt{2}(\alpha + \beta)} \right] + \frac{b}{\sqrt{8}} \log (Re_1 \sqrt{\lambda_1}) \quad (95)$$

con ovvio significato dei simboli.

Facendo riferimento ai valori di α e β della condotta su cui si è sviluppata la sperimentazione, nonché ai valori medi di a , b e k riportati nel par. 5.2.2, la precedente equazione diviene:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} = 2.04 \log \left(\frac{Re_1 \sqrt{\lambda_1}}{4.20} \right). \quad (96)$$

Si nota che nella precedente equazione il coefficiente dell'argomento del logaritmo è 4.20, invece di 2.51 dell'equazione di Nikuradse. Questo è ascrivibile al fattore di forma, che per l'equazione (96) non è globale, ossia non è relativo alla sezione intiera.

Attraverso l'equazione (96) è possibile risolvere problemi di verifica o di progetto per condotti anulari lisci.

Nei problemi di verifica si supponga che siano noti r_1 , r_2 , μ , ρ e J . Dai dati disponibili si ricava, attraverso la legge di Doshi-Gill, il raggio della velocità massima e, quindi, il valore del raggio idraulico interno R_1 . Le incognite sono il numero di Reynolds interno (Re_1), l'indice di resistenza interno (λ_1) e il valore di velocità media della zona interna (U_1). A fronte di queste tre incognite, si hanno a disposizione l'equazione (95), l'equazione di Darcy-Weisbach $J = \lambda_1 U_1^2 / (2g4R_1)$ oltre che la relazione $Re_1 = U_1 4R_1 / \nu$.

Nei problemi di progetto sono noti la portata Q , la densità ρ , la viscosità dinamica μ e la cedente piezometrica J , e si devono ricavare r_1 e r_2 . Dopo aver fissato una coppia di valori r_1 e r_2 , si ricava dalla relazione di Doshi-Gill il raggio di massimo di velocità (r_m). Si potranno, così, ottenere le grandezze relative alla zona interna, ossia, in particolare u_{*1} , $y_{01} = r_m - r_1$, il raggio idraulico della zona interna R_1 , l'area della zona interna Ω_1 e, quindi, tramite la (91), U_1 . E', così, possibile ricavare λ_1 tramite la (95) e, in ultimo, $J = \lambda_1 U_1^2 / (2g4R_1)$, da confrontarsi con il valore della cadente piezometrica dei dati. Se due valori non sono uguali si dovrà ripetere iterativamente il procedimento, fissando valori più opportuni di r_1 e r_2 .

Nella seguente tabella si riportano i valori di λ_1 ricavati dalla relazione $\lambda = J 2g4R_1 / U_1^2$, utilizzando i dati sperimentali di J e U_1 (II colonna), e i valori di λ_1 ottenuti tramite l'equazione (96) (III colonna).

PORTATA [l/s]	λ_{ls}	λ_{lc}	$(\lambda_{ls} - \lambda_{lc}) / \lambda_{ls} \%$
20	0.021	0.0207	1.4
30	0.019	0.0195	-2.6
40	0.018	0.0183	-1.7
50	0.017	0.0174	-2.4
60	0.0168	0.0168	0.0

Dalla precedente tabella si può notare che gli scarti presentano un massimo uguale a 2.6% ed un valore medio uguale ad 1.6%. Il confronto di questi risultati con quelli riportati nel par. 5.3, mostra come la procedura proposta comporti errori più piccoli.

E' doveroso segnalare che è auspicabile un approfondimento dello studio avviato, sia a livello sperimentale, pervenendo a dei profili di velocità completi e con un maggior numero di punti in corrispondenza delle pareti, sia a livello teorico, integrando sull'intera sezione.

Un proseguimento dello studio su queste basi sarebbe, peraltro, confortato dai buoni risultati che finora è stato possibile ottenere.

6 CONCLUSIONI

Nel presente lavoro si è inteso fare il punto sullo stato attuale delle indagini per la determinazione dei diagrammi di velocità e, dunque, delle resistenze al moto per condotti con sezione non circolare. In particolare, dopo aver richiamato i Fondamenti di Idraulica relativi al moto dei fluidi, si sono analizzati i diagrammi delle velocità e delle tensioni tangenziali per diversi tipi di condotti di sezione non circolare in condizioni di moto laminare, per i quali è relativamente semplice la risoluzione dell'equazione di Poisson. A completamento di questa parte, si sono presentati metodi alternativi di risoluzione dell'equazione di Poisson, ossia il metodo delle differenze finite, ritenendo, così, concluso il problema della determinazione dei diagrammi di velocità e, con esso, delle resistenze al moto per condotti cilindrici di ogni forma di pratico interesse in condizioni di moto laminare. Si è, inoltre, presentato il Principio Variazionale del Ghetti, che, pur valendo rigorosamente per le condizioni di moto laminare, pare si possa estrapolare al campo del moto turbolento. Sulla base di questo principio, Ghetti ha dimostrato l'impossibilità, per assurdo, che la relazione $u(u_*, \dots)$ in una sezione qualunque sia la stessa della sezione circolare, pur ammettendo “che sembra logico non allontanarsi dalle teorie che hanno dato buona prova nel caso della sezione circolare”.

Sulla base di questi criteri informativi si è affrontata la terza parte di questo lavoro, dedicata al moto turbolento. Relativamente alla turbolenza si è sviluppata un'approfondita analisi delle grandezze fisiche che le caratterizzano e si sono richiamate le possibili vie di studio per la determinazione dei diagrammi di velocità. In particolare si sono discusse le proposte di vari AA. Sulle leggi di velocità, fino alle più recenti teorie. Alla luce di questo, si è poi passati ad una reimpostazione teorica dei diagrammi di velocità e delle leggi di resistenza per condotti di sezione non circolare.

In virtù delle condizioni del tutto particolari che li caratterizzano, si è, poi, sviluppata una trattazione a parte per i condotti di sezione retta anulare concentrica, richiamando le formule per la determinazione della posizione della velocità massima di Macagno-McDougall [27] e di Doshi-Gill [14] e le leggi di resistenza di Macagno-McDougall [27].

Relativamente ai condotti anulari lisci, si è, poi, sviluppata un'indagine sperimentale volta alla determinazione dei diagrammi di velocità e, dunque, delle resistenze al moto. L'apparato sperimentale, realizzato presso l'Istituto di Idraulica e Costruzioni Idrauliche del Politecnico di Bari, consta di un condotto anulare liscio, la cui tubazione esterna è costituita da un tubo in plexiglass (PMMA estrusi trasparenti) di diametri effettivi, interno ed esterno, rispettivamente di 150 mm e di 160 mm. L'anima interna è costituita da un tubo in PVC di diametro effettivo esterno di 60 mm. La lunghezza del condotto descritto è di 2.050 m. Il tratto a monte del condotto ha una lunghezza di 10.50 m, mentre il tratto a valle di 7.18 m.

Per la misura delle portate si è fatto uso di una lente inserita a monte dell'apparato sperimentale, tarata con metodo volumetrico.

Per il calcolo delle perdite di carico sono state predisposte, nel tratto di prova, lungo 2.050 m, due prese, distanti tra loro 1.77 m, collegate, mediante tubi flessibili di plastica, ad un manometro differenziale ad acqua dotato di nonio decimale.

Per i rilievi di velocità si è fatto uso di un ago ipodermico di diametro esterno di 2 mm e interno di 1.75 mm, inserito nella sezione anulare attraverso un apposito foro a tenuta, realizzato sulla generatrice superiore della condotta esterna. Il tubo di Pitot così realizzato ha la presa dinamica sulla punta dell'ago ipodermico; la presa statica è stata poi ricavata lungo la circonferenza della condotta esterna. Questo sistema ha consentito di effettuare le misurazioni di velocità dalla parete interna fino a 7.9 mm dalla parete esterna, in quanto la fattura stessa della sonda, non consente di rilevare i valori di velocità oltre quella distanza. La presa dinamica del tubo di Pitot e quella statica sono state collegate, tramite tubi di plastica flessibili, ad un manometro differenziale del tipo precedentemente descritto.

Sono state effettuate misurazioni di velocità con valori di portata di 20, 30, 40, 50, 60 l/s, per un totale di cinque configurazioni. Il range di variabilità del numero di Reynolds è $100000 \div 300000$.

Dall'analisi dei dati di velocità, si è verificato che i rilievi confermano la legge della posizione del massimo di velocità data da Doshi-Gill. La possibilità di poter definire il raggio del massimo di

velocità, consente di ipotizzare il flusso circolante in un condotto anulare suddiviso in due parti: uno è quello che va dalla parete interna alla sezione del massimo di velocità (zona interna), l'altro è quello che va dalla sezione del massimo di velocità alla parete esterna). Avendo a disposizione, in modo completo, i valori puntuali di velocità della zona interna si è indirizzata a quella zona l'analisi dei diagrammi di velocità. In particolare per la zona di parete, compresa tra il substrato viscoso e il 10÷15% dello spessore della zona interna, si è constatata la validità della legge logaritmica di parete di Prandtl-Von Karman con valori di k molto prossimi a 0.4 e valori dell'ordinata all'origine mediante uguali a 4.89. Si osserva che quest'ultimo valore è più piccolo di 5.5 che è proposto in letteratura per la legge logaritmica di parete per condotti a sezione circolare. Per quanto attiene la zona compresa tra il 10÷15% dello spessore della zona interna e la sezione di massima velocità, si è potuto osservare uno scostamento dalla legge logaritmica, come messo in evidenza in quasi tutti i lavori presentati in letteratura al riguardo. Per questa zona si è applicata la funzione correttiva di Coles (funzione di scia) con valori del parametro di profilo Π mediante uguali a 0.22. La funzione di scia consente di avere una buona interpretazione analitica dei diagrammi di velocità salvo in corrispondenza della zona prossima alla velocità massima.

Si è, poi, passati ad una verifica delle leggi di resistenza proposte da Macagno-McDougall per condotti anulari lisci pervenendo a valori di indici di resistenza che presentano scarti medi dell'ordine del 7% rispetto a quelli ricavabili applicando la relazione di Darcy-Weisbach con i dati sperimentali.

Alla luce della dimostrata validità della relazione della posizione della velocità massima secondo Doshi-Gill, è dunque possibile ricavare, partendo dalla conoscenza dei raggi interno ed esterno del condotto anulare, la posizione di r_m , ossia del raggio di massima velocità. La superficie cilindrica, lungo la quale la velocità è massima, è ipotizzabile come una superficie lungo la quale la velocità è massima, è ipotizzabile come una superficie lungo la quale gli scorrimenti sono nulli. Questa ipotesi consente di considerare separatamente il moto medio che si sviluppa nella zona interna ed esterna. Tale considerazione ha consentito di semplificare la determinazione delle leggi di resistenza,

potendo in effetti far riferimento solo alla zona interna. Si è, quindi, sviluppata questa differente procedura per il calcolo delle resistenze nei condotti anulari lisci, ottenendo valori di indici di resistenza che presentano scarti percentuali, rispetto a quelli ottenuti applicando la relazione di Darcy-Weisbach ai dati sperimentali, mediamente uguali a 1.6%. In questo modo, dunque, si hanno errori inferiori a quelli ottenuti applicando leggi di resistenze proposte da altri AA.

Non è stato possibile, con il presente lavoro, ricavare le leggi di resistenza per condotti anulari scabri, ma, alla luce dei buoni risultati finora ottenuti, si ritiene che l'approccio seguito possa essere utile.

APPENDICI

APPENDICE A

Diagrammi qualitativi di velocità e resistenze al moto in condotti di sezione retta anulare in condizioni di moto laminare.

Si faccia riferimento ad una condotta di sezione retta anulare in condizioni di moto uniforme laminare. Per fissare le idee, si faccia riferimento ai seguenti dati:

peso specifico: $\gamma=9800 \text{ Nm}^{-3}$;

viscosità dinamica: $\mu=1005.5 \cdot 10^{-6} \text{ N sec m}^{-2}$;

cadente piezometrica: $J=0.00001$;

raggio interno: $r_1=0.030 \text{ m}$;

raggio esterno: $r_2=0.075 \text{ m}$.

Applicando le formule riportate nel paragrafo 2.3, si ottengono i seguenti risultati:

portata: $Q=2.475 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3 \text{ sec}^{-1}$;

velocità media: $V=0.017 \text{ m sec}^{-1}$;

numero di Reynolds: $Re=1492$.

Si riportano nelle fig. (A1) e (A2) i diagrammi

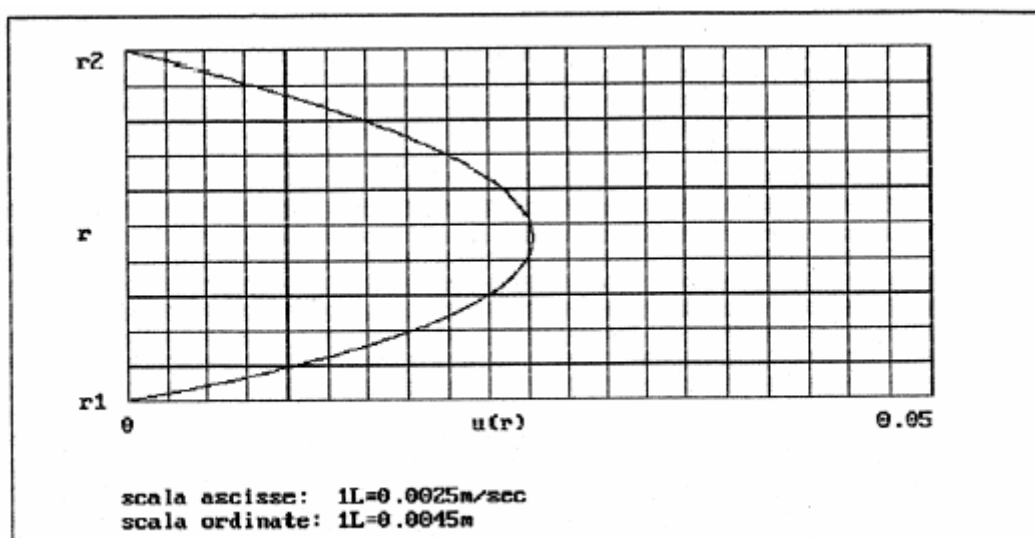


Fig. A1. Diagramma di velocità.

delle tensioni tangenziali e di velocità. Essi pur

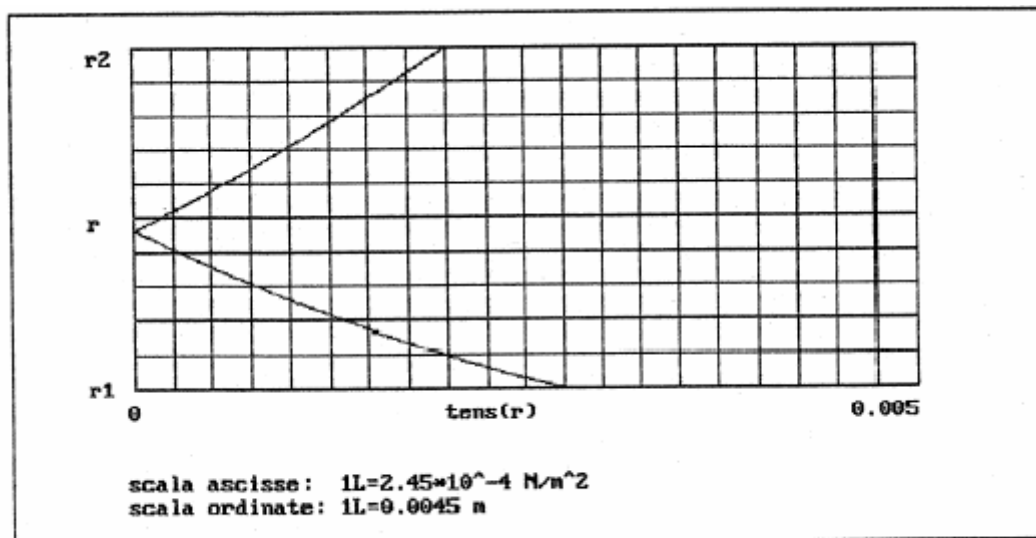


Fig. A2. Diagramma delle tensioni.

essendo il risultato di ben definiti dati iniziali, possono essere considerati qualitativamente validi per ogni sezione anulare in condizioni di moto uniforme laminare. In particolare si nota lo scostamento del massimo di velocità verso la parete interna.

APPENDICE B

Applicazione del metodo delle differenze finite per la soluzione dell'equazione di Poisson.

Si presenta un'applicazione del metodo delle differenze finite, per la determinazione dei diagrammi di velocità di un flusso in condizioni di moto laminare in

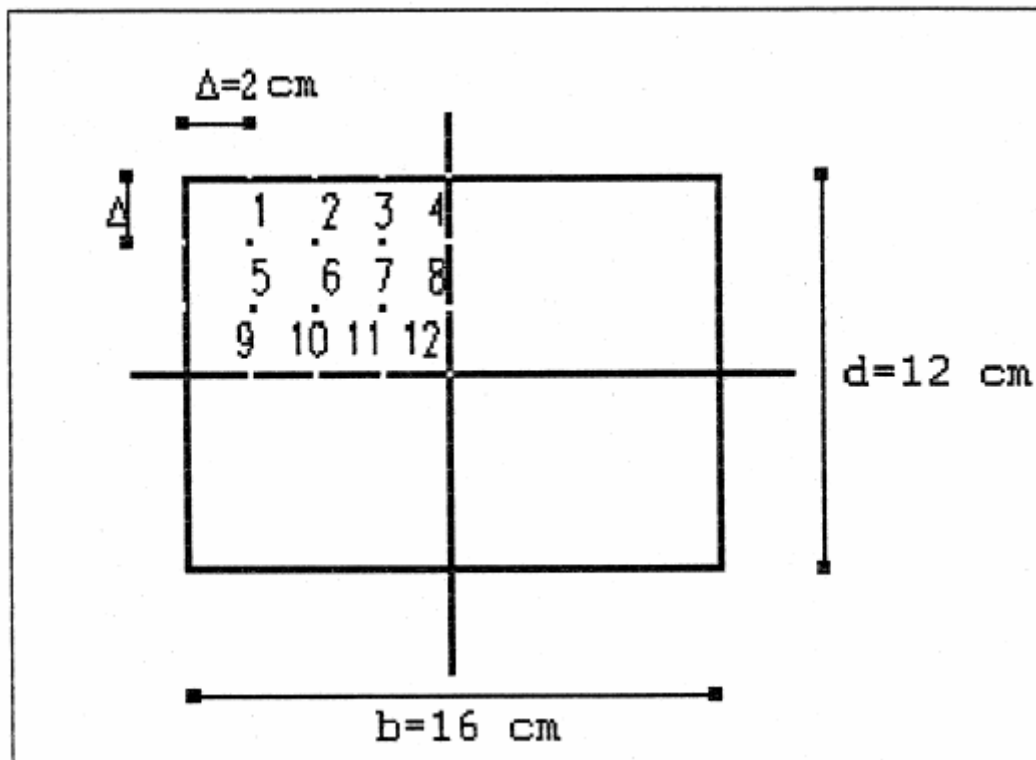


Fig. B1. Reticolo per l'applicazione del metodo delle differenze finite.

un condotto di sezione retta rettangolare $16 \times 12 \text{ cm}$, con $J = 0.000001$, $\gamma = 9800 \text{ N m}^{-2}$, $\mu = 1005.5 \cdot 10^{-6} \text{ N sec m}^{-2}$.

Si faccia riferimento alla fig. (B1) per quanto riguarda il reticolo.

Il problema viene risolto utilizzando la simmetria rispetto alle due mediane, consentendo, così, una notevole riduzione del numero delle equazioni e delle incognite.

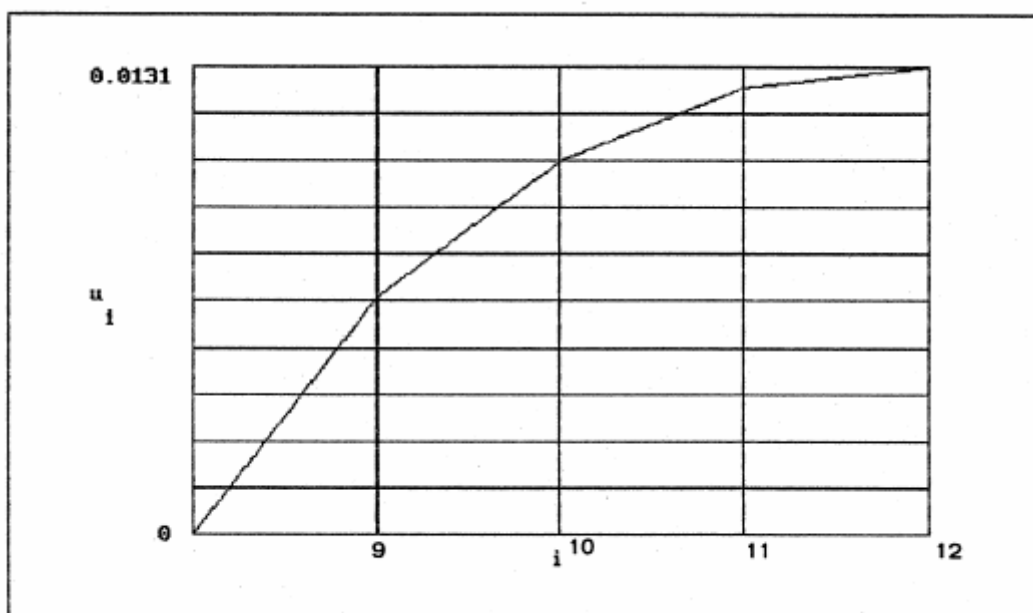


Fig. B2. Andamento delle velocità sul piano orizzontale mediano.

In fig. (B2) si riporta il diagramma di velocità nella sezione del piano orizzontale mediano.

Nella pagina seguente, si riportano, in tabella B1, i valori di velocità radici della soluzione del sistema lineare (prima colonna), in confronto con i valori ottenuti attraverso lo sviluppo in serie (si vedano le formule del paragrafo 2.6) arrestato ai primi dieci termini (seconda colonna). Si mette in evidenza che lo scarto tra i valori ottenuti attraverso i due metodi non supera 2.69%.

n^*	V_1 (m/s)	V_2 (m/s)	$\epsilon(\%)$
1	0.00398	0.00409	-2.69
2	0.00609	0.00620	-1.77
3	0.00713	0.00723	-1.38
4	0.00745	0.00754	-1.19
5	0.00594	0.00605	-1.82
6	0.00935	0.00951	-1.68
7	0.0111	0.0112	-0.89
8	0.0116	0.0118	-1.69
9	0.00654	0.00665	-1.65
10	0.0104	0.0105	-0.95
11	0.0124	0.0125	-0.80
12	0.0130	0.0131	-0.76

Tab. B1. Valori di velocità ottenuti col metodo delle differenze finite (I colonna) in confronto con quelli ottenuti con sviluppo in serie (II colonna). In III colonna si riportano gli scarti percentuali $((V_1 - V_2)/V_2 \cdot 100)$.

APPENDICE C*Schede dei valori puntuali di velocità rilevanti nello studio sperimentale*

A) Portata 20 l/s

<i>n° (CASO 20 l/s)</i>	<i>r (mm)</i>	<i>V (m/s)</i>
1	31.00	1.16
2	31.40	1.17
3	31.80	1.19
4	32.20	1.23
5	32.50	1.25
6	33.00	1.31
7	33.30	1.32
8	33.80	1.36
9	34.30	1.39
10	34.80	1.41
11	35.30	1.44
12	36.30	1.47
13	37.30	1.51
14	38.30	1.53
15	39.30	1.54
16	40.30	1.55
17	41.40	1.56
18	42.30	1.56
19	43.60	1.57
20	45.60	1.57
21	47.30	1.57
22	49.30	1.57
23	51.30	1.56
24	53.30	1.55
25	55.30	1.54
26	57.30	1.52
27	59.40	1.51
28	61.10	1.49
29	63.30	1.46
30	65.00	1.43
31	67.10	1.38

B) Portata 30 l/s.

n° (CASO 30 l/s)	r (mm)	V (m/s)
1	31.00	1.66
2	31.40	1.67
3	31.80	1.70
4	32.10	1.74
5	32.40	1.77
6	32.80	1.85
7	33.10	1.88
8	33.40	1.90
9	33.80	1.94
10	34.10	1.96
11	34.50	2.00
12	35.10	2.03
13	35.90	2.08
14	36.90	2.12
15	37.80	2.15
16	38.80	2.17
17	39.80	2.18
18	40.90	2.20
19	41.80	2.21
20	42.80	2.22
21	44.10	2.22
22	46.20	2.22
23	47.80	2.23
24	49.50	2.22
25	51.80	2.20
26	53.70	2.19
27	55.70	2.17
28	57.30	2.16
29	58.80	2.14
30	61.20	2.11
31	62.70	2.08
32	64.80	2.05
33	67.10	1.98

C) Portata 40 l/s

<i>n° (CASO 40 l/s)</i>	<i>r (mm)</i>	<i>V (m/s)</i>
1	31.00	2.18
2	31.40	2.17
3	31.70	2.20
4	32.20	2.27
5	32.60	2.38
6	32.80	2.40
7	33.00	2.43
8	33.20	2.46
9	33.60	2.51
10	33.90	2.53
11	34.20	2.58
12	34.50	2.61
13	34.70	2.64
14	35.00	2.65
15	35.20	2.67
16	35.60	2.69
17	35.80	2.70
18	36.20	2.74
19	36.70	2.76
20	37.30	2.78
21	37.80	2.80
22	38.30	2.82
23	38.80	2.85
24	39.30	2.85
25	39.80	2.87
26	40.80	2.88
27	41.80	2.89
28	42.80	2.91
29	43.80	2.91
30	45.80	2.93
31	47.80	2.93
32	49.80	2.93
33	51.80	2.92
34	53.80	2.93
35	55.80	2.91
36	57.80	2.88
37	59.80	2.86
38	61.80	2.82
39	63.80	2.79
40	65.80	2.72
41	67.10	2.68

D) Portata 50 l/s

<i>n° (CASO 50 l/s)</i>	<i>r (mm)</i>	<i>V (m/s)</i>
1	31.00	2.73
2	31.30	2.73
3	31.60	2.75
4	31.80	2.79
5	32.10	2.85
6	32.40	2.94
7	32.70	3.01
8	33.10	3.07
9	33.40	3.12
10	33.80	3.17
11	34.10	3.20
12	34.30	3.24
13	34.70	3.28
14	35.10	3.32
15	35.80	3.40
16	36.50	3.44
17	36.90	3.45
18	37.30	3.47
19	37.80	3.49
20	38.80	3.53
21	39.80	3.55
22	40.80	3.57
23	41.90	3.59
24	43.30	3.60
25	44.40	3.61
26	46.10	3.62
27	47.10	3.62
28	49.80	3.61
29	51.90	3.60
30	53.80	3.58
31	55.80	3.56
32	57.80	3.53
33	59.90	3.48
34	61.90	3.43
35	63.90	3.37
36	66.30	3.27
37	67.10	3.22

E) Portata 60 l/s.

n° (CASO 60 l/s)	r (mm)	V (m/s)
1	31.00	3.23
2	31.30	3.25
3	31.70	3.27
4	32.10	3.36
5	32.40	3.42
6	32.80	3.56
7	33.10	3.60
8	33.50	3.68
9	33.80	3.75
10	34.00	3.77
11	34.30	3.81
12	34.70	3.89
13	35.20	3.93
14	35.40	3.95
15	35.60	3.97
16	35.80	4.00
17	36.20	4.02
18	36.60	4.05
19	36.80	4.06
20	37.00	4.09
21	37.60	4.12
22	37.90	4.12
23	38.40	4.15
24	39.00	4.17
25	39.50	4.19
26	40.00	4.21
27	40.80	4.23
28	41.60	4.23
29	42.40	4.24
30	43.60	4.24
31	44.40	4.26
32	45.30	4.26
33	46.60	4.27
34	47.60	4.27
35	48.50	4.27
36	49.80	4.27
37	50.90	4.27
38	52.50	4.26
39	53.50	4.25
40	54.70	4.24
41	56.20	4.23
42	57.40	4.21
43	59.60	4.18
44	61.80	4.13
45	64.30	4.08
46	64.80	4.05
47	67.10	3.93

BIBLIOGRAFIA

- [1] BAKHMETEFF, B.A., The mechanics of turbulent flow, Princeton University Press, 1936.
- [2] BATCHELOR, G.K., The theory of homogeneous turbulence, Cambridge Univ. Press, 1953.
- [3] BECCHI, I.-REBAUDENGO LANDO', L., Studio sperimentale delle caratteristiche cinematiche della superficie libera di correnti uniformi turbolente, L'Energia Elettrica, 1973.
- [4] BIRD, R. -BYRON-STEWART, W.E.-LIGHTFOOT, E.N., Transport phenomena, Wiley, New York, 1960.
- [5] BLASIUS, H., Grenzschichten in flüssigkeiten mit kleiner reibung, Z. Math. U. Phys., NACA TM., 1908.
- [6] BOUSSINESQ, J., Theorie de l'écoulement tourbillant, Mem. Pers. Acad. Sci., Paris, 1877.
- [7] CEBECI, T.-SMITH, V.A.M.O., Analysis of turbulent boundary layers, Academic Press, 1974.
- [8] CITRINI, D.-NOSEDA, G., Idraulica, CEA, Milano, 1983.
- [9] CLAUSER, F.H., The turbulent boundary layer, Advan. Appl. Mech., 1956.
- [10] COLES, D., The law of the wake in the turbulent boundary layer, J. Fluid Mech., 1956.
- [11] COZZO, G., Il moto dei fluidi non newtoniani, Politecnico di Milano, 1979.
- [12] DE SAINT VENANT, B., Mémoires sur la torsion des prismes avec des considérations sur leur flexion...., Mémoires prés. par divers sav. à l'Acad. de France, 1855.
- [13] DI RICCO, G., Moto uniforme a regime regolare d'una corrente fluida cilindrica a sezione diversa dalla circolare, L'ingegnere, 1949.
- [14] DOSHI, M.R.-GILL, W.N., Fully developed turbulent flow in an annulus: radius of maximum velocity, Journal of Applied Mechanics, 1971.
- [15] DURAND, W.F., Aerodyn. Theory, 1935.

- [16] GENTILINI, B., Sull'equazione del movimento uniforme delle correnti liquide, L'Energia Elettrica, 1935.
- [17] GHETTI, A., Distribuzione delle velocità all'interno e sforzi di scorrimento al contorno nelle correnti a regime uniforme, L'energia Elettrica Vol. XXVII n. 11-12, 1950.
- [18] HUGHES, W.F.-BRIGHTON, J.A., Fluid dynamics, McGraw-Bill Book Company, 1967.
- [19] JACOBS, W., Umformung eines turbulenten geschwindigkeitsprofils, Z. Angew. Math. Mech., 1939.
- [20] KENNARD, E.H., Kinetic theory of gases, McGraw-Hill, New York, 1938.
- [21] KLEBANOFF, P.S., Characteristics of turbulence in a boundary layer with zero pressure gradient, NACA Tech., 1954.
- [22] KLEBANOFF, P.S.-DIEHL, Z.W., Some features of artificially thickened fully developed turbulent boundary layers with zero pressure gradient, NACA, 1952.
- [23] LAUFER, J., The structure of turbulence in fully developed pipe flow, NACA R., 1954.
- [24] LONG, R.R.-CHEN, T.C., Evidence in support of the mesolayer theory of turbulence, Second International Symposium on Stratified Flows, Norvegia, 1980.
- [25] LORENZ, F.R., Uber turbulence stromung durch rorhe mit kreisringformigen querschnitt, Mitt. Inst. Stromungsmaschinen, 1932.
- [26] LOVE, H., T Teoria dell'elasticità, Cambridge, 1927.
- [27] MACAGNO, E.O.-McDOUGALL, D.W., Turbulent flow in annular pipes, A.I.Ch.E. Journal, 1966.
- [28] MARCHI, E.-RUBATTA, A., Meccanica dei fluidi, UTET, Milano, 1981.
- [29] MARCHI, E., Il moto uniforme delle correnti liquide nei condotti chiusi ed aperti, L'Energia Elettrica n. 4-5, Parti I-II, 1961.
- [30] METER, D.M.-BIRD, R. BYRON, Am. Inst. Chem. Eng. J., 1961.
- [31] NIKURADSE, J., Law of flow in rough pipes, Tech. Memo. NACA, 1933.

- [32] PASCHOUD, M., Le problème de la torsion et l'analogie hydrodynamique de M. Boussinesq, Bull. Tech. de la Suisse Rom., 1925.
- [33] PERRY, A.E.-ABELL, C.J., Scaling laws for pipe-flow turbulence, Jour. Fl. Mech., 1975.
- [34] PETRILLO, A.-RANIERI, M., Diagrammi di velocità nelle correnti in canale liscio con pendenze fino a 12°, Acc. Pugliese delle Sc., 1981.
- [35] PETRILLO, A.-RANIERI, M., The influence of self-aeration on resistance in smooth and rough steep channels, Meccanica, 1984.
- [36] PETRILLO, A.-RANIERI, M., Fast flows in smooth channels, Meccanica, 1983.
- [37] PRANDL, L., Neue ergebnisse der turbulenzforschung, Zeitschr. des Ver. d. Ingen., 1933.
- [38] PULCI DORIA, G.-BOTTILLO, B., La distribuzione delle intensità di turbolenza in correnti di varia natura, XXII Conv. Di Idraulica e Costr. Idr., Cosenza, 1990.
- [39] ROTHFUS, R.R.-SARTORY, W.K.-KERMODE, R.I., Flow in concentric annuli at high Reynolds numbers, A.I.Ch.E. Journal, 1966.
- [40] ROTTA, J.C., Turbulent boundary layers in incompressible flows, Progr. Aeronaut. Sci. 1962.
- [41] ROUSE, H., Fluid mechanics for hydraulic engineers, Engin. Soc. Monogr., New York-London, 1938.
- [42] SCHLICHTING, H., Boundary layer theory, McGraw-Hill, 1955.
- [43] SCHUBAUER, G.B., Turbulent processes as observed in boundary layer and pipe, J. Appl. Phys., 1954.
- [44] SHAMES, I. H., Mechanics of fluids, McGraw-Hill, U.S.A., 1962.
- [45] SIMPSON, R.L., Characteristics of turbulent boundary layers at low Reynolds numbers with and without transpiration, J. Fluid Mech., 1970.
- [46] TAYLOR, G.I., The transport of vorticity and heat through fluids in turbulent motion, Proc. of the Roy. Soc., London, 1932.

- [47] TENNEKES, H.-LUMLEY, J.L., A first course in turbulence, The MIT Press, Cambridge, 1972.
- [48] TIMOSHENKO, S., Teoria dell'elasticità, E,gin. Soc. Monogr., New York-London, 1934.
- [49] VAN DRIEST, E.R., On turbulent flow near a wall, J. Aeronaut. Sci., 1956.
- [50] VIPARELLI M., Correnti rapide. Risultati in cabaletta a 45°, L'Energia Elettrica, 1654.
- [51] VIPARELLI, M., Correnti rapide, L'Energia Elettrica, 1658.
- [52] VITI, M., Lezioni di idraulica-Meccanica dei fluidi, Libr. Eredi V. Veschi, Roma, 1975.
- [53] VON KARMAN, TH., The fundamentals of the statistical theory of turbulence, Journ. of the statistical theory of turbulence, Journ. of Aeron. Sc., 1937.
- [54] VON KARMAN, TH., Mechanical similitude and turbulence, NACA Tech., 1931.

INDICE ANALITICO

A

azione di trascinamento 21; 22; 23

B

buffer layer 82; 86

C

condizioni al contorno 12; 13; 24; 31; 114

D

differenze finite 4; 44; 54; 150; 156

E

eddies 73; 76; 77
 energia cinetica della turbolenza 62
 equazione di Eulero 12
 equazione di Navier 21; 28
 equazione di Poisson 4; 28; 33; 38; 40; 42; 50; 150; 156
 equazione di Reynolds 70
 equazione di Stokes 21

F

fattore di forma 23; 54; 148
 fluido perfetto 7; 12; 14; 21; 31; 32
 fluido stokesiano 19
 flusso completamente sviluppato 67; 68; 85
 funzione di scia Vedi wake function; Vedi wake function; Vedi wake function; Vedi wake function

I

indice di resistenza 54; 123; 146; 148
 indici di turbolenza 61
 inner region 79; 81; 82; 84; 86; 87; 90; 93; 94; 95

L

laminare 4; 5; 8; 14; 23; 27; 32; 37; 54; 56; 58; 59; 60; 66; 67; 68; 70; 88; 89; 114; 150; 154; 155; 156
 legge di Coles 131; 134; 137; 140; 143; 144
 legge logaritmica 85; 102; 116; 119; 152
 leggi di resistenza 4; 5; 72; 106; 108; 111; 113; 119; 123; 150; 152; 153
 livello di turbolenza 62; 106
 lunghezza di mescolamento 71; 72; 73; 74; 75; 85; 86; 96; 97

M

microscala della turbolenza 76
 moto permanente 8; 27
 moto uniforme 4; 22; 23; 54; 68; 85; 96; 102; 104; 108; 154; 155; 165
 moto vario 10

N

numero di Reynolds 54; 55; 82; 90; 91; 94; 100; 107; 126; 148; 151; 154

O

outer region 79; 81; 83; 88; 89

P

parametro di profilo 90; 91; 152
pressione 7; 9; 12; 20; 21; 24; 28; 67; 79; 83; 86; 90; 91; 94; 102; 126
principio variazionale di Ghetti 110

R

raggio idraulico 23; 24; 34; 35; 36; 54; 107; 113; 114; 115; 118; 147; 148

S

scabrezza 24; 93; 94; 95; 96; 107; 117; 118
scala integrale 77
spessore della quantità di moto 77; 78; 90; 91
strati limiti in equilibrio 78; 79; 92
strato limite 66; 67; 68; 73; 75; 78; 79; 80; 81; 83; 85; 86; 87; 88; 93; 102; 103; 104; 105; 106; 108
substrato viscoso 82; 83; 84; 87; 90; 93; 96; 98; 102; 106; 143; 152

T

turbolento 4; 5; 8; 9; 14; 23; 24; 56; 57; 58; 59; 60; 61; 67; 68; 70; 71; 73; 75; 76; 79; 80; 81; 83; 85; 86; 87; 88; 89; 96; 99; 100; 106;
107; 108; 109; 110; 112; 113; 114; 117; 118; 121; 150
turbolenza 58; 61; 62; 63; 64; 71; 72; 75; 82; 84; 102; 103; 104; 106; 108; 150; 166

W

wake function 90; 106; 108; 144