

1. GETTI PIANI TURBOLENTI.

1.1. Osservazioni sperimentali in letteratura.

Si consideri un getto immesso in un corpo liquido in quiete di volume infinitamente elevato da un ugello di sezione rettangolare di lunghezza molto grande. Si indichi l'altezza dell'ugello con $2b_0$ e sia U_0 la velocità uniforme nella sezione di uscita del getto.

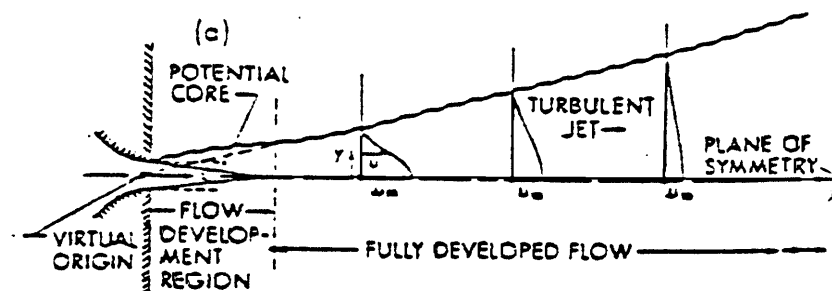


Fig. 1.1.1. Getto turbolento piano, con la zona di flusso non completamente sviluppata (ZFE) e quella completamente sviluppata (ZEF).

Nell'ipotesi di moto turbolento, il getto tenderà a mescolarsi violentemente con il fluido ambiente dando luogo ad un incremento delle dimensioni della sua sezione trasversale. A tal riguardo e per quanto segue, si faccia riferimento alla fig. 1.1.1, nella quale si riporta una rappresentazione schematica del getto. Le osservazioni sperimentali di molti autori mettono in evidenza che, lungo la direzione longitudinale, il getto può essere suddiviso in due parti. La regione più prossima all'ugello è nota come regione di sviluppo del campo di moto (ZFE, ossia *Zone of Flow Establishment*), in cui si rileva la presenza di una parte interna (*core*) con un'andamento uniforme della velocità (U_0) ed una parte esterna in cui la velocità volge gradatamente a zero. Nella seconda regione, nota come regione di flusso completamente sviluppato (ZEF, ossia *Zone of Established Flow*), il campo di moto turbolento completamente sviluppato è penetrato fino all'asse del getto, annullando la regione di flusso del *core*. Pur non essendoci una unanimità di giudizio, per un getto piano la lunghezza del *core* è di circa $12b_0$. Nel seguito si tratterà della regione completamente sviluppata del getto.

1.2. Regione completamente sviluppata di un getto turbolento piano.

Nella regione completamente sviluppata di un getto la distribuzione nel piano trasversale della componente di velocità lungo la direzione x è del tipo mostrata in fig. 1.1.1.

Si osserva che, in ogni sezione trasversale, la u decresce con continuità a partire da un valore massimo, u_m , in corrispondenza dell'asse, fino a zero ad una certa distanza dall'asse stesso.

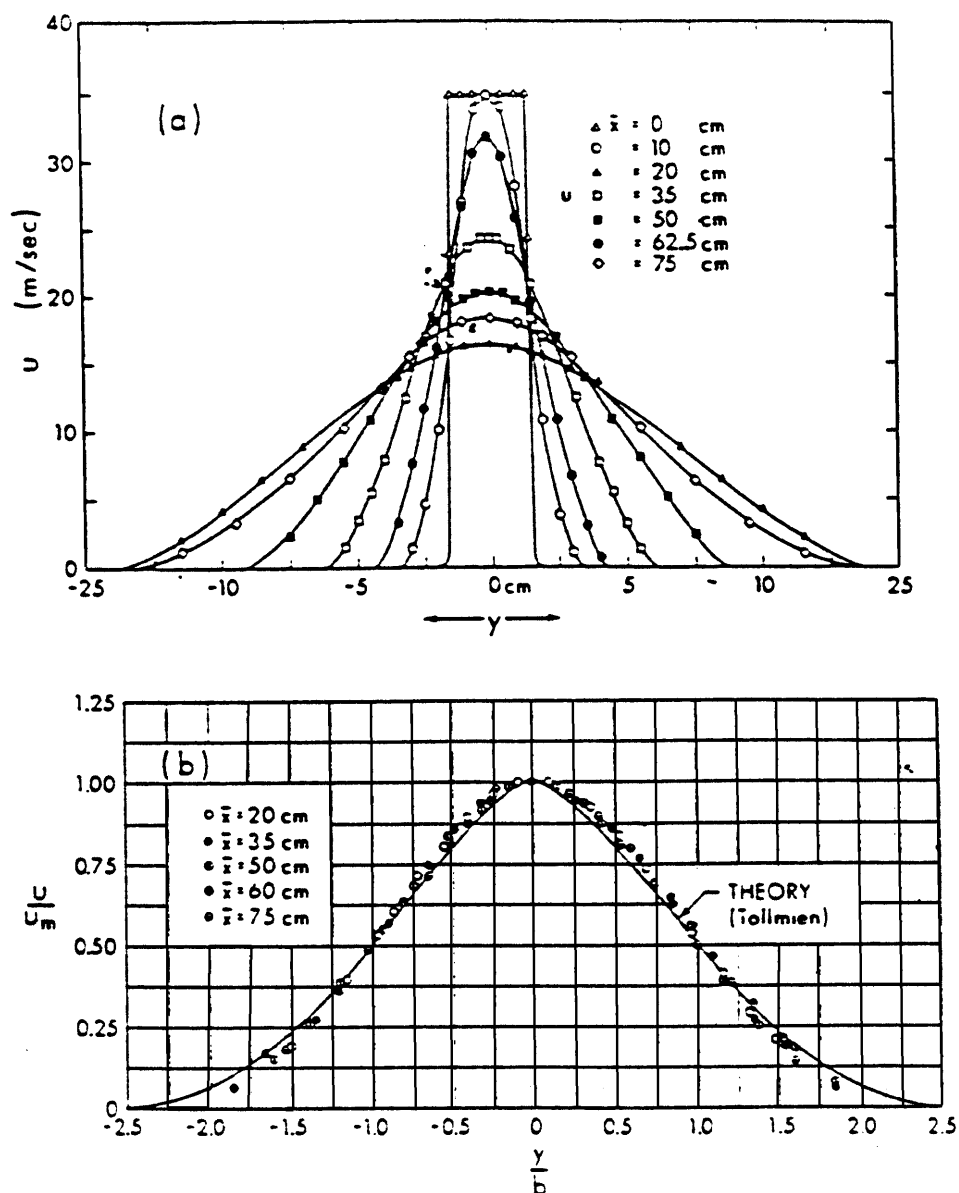


Fig. 1.2.1. Distribuzioni di velocità (non adimensionalizzate e dimensionalizzate) in un getto turbolento piano.

Adimensionalizzando i valori di u relativi ad ogni sezione trasversale con la corrispondente u_m e le distanze y con b , essendo b la scala delle lunghezze definita come la distanza dall'asse del getto in corrispondenza della quale si ottiene una velocità uguale a $u_m/2$, si ottiene un diagramma del tipo di fig. 1.2.1. In letteratura b è anche definita come la

distanza dall'asse del getto in cui $u=u_m/e$. Dalla fig. 1.2.1 si evince come sia possibile, operando le adimensionalizzazioni precedentemente descritte, far ricadere tutti i dati sperimentali su un'unica curva.

1.3. Equazioni del moto.

Nel seguito si riportano le equazioni del moto per un getto piano turbolento come proposto da N. Rajaratnam (1976).

Fissato un sistema di assi cartesiani del tipo di fig. 1.1.1, le equazioni di Reynolds sono

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + \\ - \left(\frac{\partial \langle u'^2 \rangle}{\partial x} + \frac{\partial \langle u'v' \rangle}{\partial y} + \frac{\partial \langle u'w' \rangle}{\partial z} \right) \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) + \\ - \left(\frac{\partial \langle u'v' \rangle}{\partial x} + \frac{\partial \langle v'^2 \rangle}{\partial y} + \frac{\partial \langle v'w' \rangle}{\partial z} \right) \end{aligned}$$

e, infine

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) + \\ - \left(\frac{\partial \langle u'w' \rangle}{\partial x} + \frac{\partial \langle v'w' \rangle}{\partial y} + \frac{\partial \langle w'^2 \rangle}{\partial z} \right). \end{aligned} \quad (1.3.3)$$

con ovvio significato dei simboli.

L'equazione di continuità, nell'ipotesi di fluido incompressibile, è

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$

Nelle precedenti equazioni, l'asse x è lungo la direzione longitudinale del getto, l'asse y è verticale e, infine, l'asse z è normale ai primi due a formare una terna trirettangola. Con p si è indicato la pressione media in ogni punto, ν è la viscosità cinematica, ρ è la densità del fluido e t è la variabile temporale. Con i simboli $\langle \rangle$ si è indicata, ora, la media temporale delle grandezze. Poichè il flusso è bidimensionale, in media si ha che $w=0$, $\partial/\partial z$ di ogni quantità media è nulla, $\langle u'w' \rangle = 0$, $\langle v'w' \rangle = 0$ e, infine, poichè il campo di moto medio è stazionario, $\partial/\partial t = 0$. Inoltre, poichè la scala delle lunghezze nella direzione trasversale del flusso è piccola, u è generalmente molto più grande di v e i gradienti lungo la direzione y sono molto più grandi dei gradienti lungo la direzione x . Se si tiene conto di queste considerazioni le equazioni divengono

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + \nu \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial \langle u'v' \rangle}{\partial y} - \frac{\partial \langle u'^2 \rangle}{\partial x} \quad (1.3.1)$$

$$0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial \langle v'^2 \rangle}{\partial y} \quad (1.3.2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

Integrando la (1.3.2) rispetto ad y , da y ad un punto esterno al getto, si ottiene

$$p = p_{\infty} - \rho \langle v'^2 \rangle$$

avendo indicato con p_{∞} la pressione esterna al getto. Differenziando la precedente equazione

e sostituendola nella (1.3.1) si ottiene

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{dp_{\infty}}{dx} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial \langle u'v' \rangle}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial x} (\langle u'^2 \rangle - \langle v'^2 \rangle).$$

L'ultimo termine nella precedente equazione è più piccolo degli altri e può, dunque, essere eliminato in prima approssimazione. Pertanto si ottiene

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial \langle u'v' \rangle}{\partial y} \quad (1.3.3)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

in cui si è indicato p_{∞} con p per semplicità. Nella (1.3.3) potremo riscrivere gli ultimi due termini come segue

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial y} (-\rho \langle u'v' \rangle) = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial y} (\tau_l + \tau_t)$$

avendo indicato con τ_l e τ_t rispettivamente le tensioni tangenziali laminari e turbolente e con μ la viscosità dinamica. Nei campi di moto a turbolenza libera τ_t è sempre molto più grande di τ_l e pertanto si potrà trascurare quest'ultima, ottenendo

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_t}{\partial y}.$$

Inoltre, poiché nella maggior parte dei problemi pratici il gradiente di pressione nella direzione longitudinale è trascurabile, si potrà porre $dp/dx=0$. In queste ipotesi si ottengono le ben note equazioni del moto per un getto turbolento piano con gradiente di pressione nullo lungo la direzione assiale

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_t}{\partial y} \quad (1.3.4)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \quad (1.3.5)$$

1.4. Equazione integrale della quantità di moto.

Per i getti turbolenti piani immessi in un campo di liquido in quiete, caratterizzati da un gradiente di pressione nullo lungo la direzione longitudinale e da assenza di forze esterne, la quantità di moto lungo l'asse x rimane costante. Moltiplicando la (1.3.4) per ρ e integrando da $y=0$ a $y=\infty$ si ottiene

$$\rho \int_0^{\infty} u \frac{\partial u}{\partial x} dy + \rho \int_0^{\infty} v \frac{\partial u}{\partial y} dy = \int_0^{\infty} \frac{\partial \tau_t}{\partial y} dy. \quad (1.4.1)$$

Si considerino, ora, i singoli termini della precedente equazione. Per la relazione di Leibnitz

$$\rho \int_0^{\infty} u \frac{\partial u}{\partial x} dy = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{\partial}{\partial x} (\rho u^2) dy = \frac{1}{2} \frac{d}{dx} \int_0^{\infty} \rho u^2 dy$$

e

$$\rho \int_0^{\infty} v \frac{\partial u}{\partial y} dy = \rho \left(\left[uv \right]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} u \frac{\partial v}{\partial y} dy \right) = \rho \left(\int_0^{\infty} u \frac{\partial u}{\partial x} dy \right)$$

poiché per $y=0$ si ha $u=u_m$ e $v=0$, e per $y \rightarrow \infty$ si ha $u=0$ e $v=v_e$, avendo indicato con v_e la *velocità di intrusione (entrainment velocity)* di cui si discuterà nel seguito. Pertanto

$$\rho \int_0^{\infty} v \frac{\partial u}{\partial y} dy = \frac{1}{2} \frac{d}{dx} \int_0^{\infty} \rho u^2 dy.$$

Il primo membro della (1.4.1) diviene

$$\frac{d}{dx} \int_0^{\infty} \rho u^2 dy.$$

L'ultimo termine della (1.4.1) diviene

$$\int_0^{\infty} \frac{\partial \tau_t}{\partial y} dy = [\tau_t]_0^{\infty} = \tau(\infty) - \tau(0) = 0$$

in quanto $\tau(0)=0$ per considerazioni di simmetria ed è ragionevole assumere $\tau(\infty)=0$.
Pertanto la (1.4.1) diviene

$$\frac{d}{dx} \int_0^{\infty} \rho u^2 dy = 0. \quad (1.4.2)$$

La (1.4.2) consente di affermare che la variazione del flusso della quantità di moto lungo la direzione x è nulla; ossia che il flusso della quantità di moto nella direzione x si conserva (*preservation hypothesis*).

Nel caso di un getto piano del tipo analizzato, con un orifizio di altezza $2b_0$ e velocità all'uscita U_0 , il flusso della quantità di moto, per unità di lunghezza dell'orifizio, è $M_0=2\rho b_0 U_0^2$. L'integrazione della (1.4.2) porta a concludere che

$$2 \int_0^{\infty} \rho u^2 dy = M_0.$$

Il flusso della quantità di moto è una importante grandezza fisica che caratterizza il comportamento del getto nella ZEF.

L'equazione della quantità di moto è utile per determinare le leggi di variazione delle scale di lunghezza e velocità. Per getti piani turbolenti la distribuzione di velocità

nella regione di flusso completamente sviluppata gode della proprietà di similitudine. Cioè, come diverse esperienze hanno messo in evidenza

$$\frac{u}{u_m} = f(\eta) \quad (1.4.3)$$

con $\eta = y/b$. Si assumono per u_m e b delle leggi di potenza, come di seguito riportato

$$u_m \propto x^p \quad (1.4.4)$$

$$b \propto x^q \quad (1.4.5)$$

essendo p e q due esponenti incogniti da calcolare. Sostituendo le (1.4.3), (1.4.4) e (1.4.5) nella (1.4.2) si ottiene

$$\frac{d}{dx} \int_0^\infty \rho u_m^2 b f^2 d\eta = 0 \quad (1.4.6)$$

con $f^2 = f^2(\eta)$. Riscrivendo la (1.4.6) si ottiene

$$\frac{d}{dx} \rho b u_m^2 \int_0^\infty f^2 d\eta = 0. \quad (1.4.7)$$

Nella (1.4.7) si ha che

$$\int_0^\infty f^2 d\eta = \text{cost}$$

e dunque

$$\frac{d}{dx}(bu_m^2) = 0$$

Dalla precedente equazione è possibile affermare che bu_m^2 è indipendente da x . In altri termini si ha che

$$bu_m^2 \propto x^0.$$

Cioè, tenendo conto delle (1.4.4) e (1.4.5), si ha che

$$x^{q+2p} \propto x^0 \quad q+2p=0 \quad (1.4.8)$$

Per poter valutare p e q è necessaria un'ulteriore equazione. Diversi sono i metodi che consentono di risolvere questo problema. Nel seguito si mostreranno alcune procedure per calcolare q e p .

1.5. Leggi di similitudine.

Si faccia riferimento alle equazioni del moto (1.3.4) e (1.3.5). Si può porre, inoltre,

$$\frac{u}{u_m} = f(\eta) \quad \text{con} \quad u_m \propto x^p, b \propto x^q.$$

Le osservazioni sperimentali e considerazioni di similitudine consentono di scrivere che

$$\frac{\tau}{\rho u_m^2} = g(\eta). \quad (1.5.1)$$

Si sostituisca la precedente equazione nella (1.3.4). Si ottiene

$$u = u_m f(\eta)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(u_m f) = u_m \frac{df}{d\eta} \frac{\partial \eta}{\partial b} \frac{db}{dx} + f \frac{du_m}{dx}$$

cioè

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -u_m f' \frac{y}{b^2} b' + f u_m'$$

con

$$f' = \frac{df}{d\eta}, \quad b' = \frac{db}{dx}, \quad u_m' = \frac{du_m}{dx}.$$

Pertanto

$$u \frac{\partial u}{\partial x} = u_m u_m' f^2 - \frac{u_m^2 b'}{b} \eta f f'. \quad (1.5.2)$$

Per poter valutare il secondo termine del primo membro della (1.3.4) si necessita di un'espressione per v che è possibile ottenere per integrazione dell'equazione di continuità:

$$v = \int_0^y \frac{\partial v}{\partial y} dy = - \int_0^y \frac{\partial u}{\partial x} dy = \int_0^y \left(\frac{u_m b'}{b} \eta f' - u_m' f \right) dy = u_m b' \int_0^\eta \eta f' d\eta - u_m' b \int_0^\eta f d\eta.$$

cioè

$$v = u_m b' \left(\eta f - \int_0^\eta f d\eta \right) - u_m' b \int_0^\eta f d\eta \quad (1.5.3)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(u_m f) = u_m f' \frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{u_m}{b} f'.$$

Pertanto

$$v \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{u_m^2 b'}{b} \left(\eta f f' - f' \int_0^\eta f d\eta \right) - u_m u'_m f' \int_0^\eta f d\eta$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_t}{\partial y} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial y} (\rho u_m^2 g) = \frac{u_m^2}{b} g'. \quad (1.5.4)$$

Sostituendo le (1.5.1), (1.5.3) e (1.5.4) nella (1.3.4) e moltiplicando per b/u_m^2 si ottiene dopo ovvi passaggi

$$g' = \frac{b u'_m}{u_m} \left(f^2 - f' \int_0^\eta f d\eta \right) - b' \left(\eta f' - \eta f f' + f' \int_0^\eta f d\eta \right). \quad (1.5.5)$$

Poiché il primo membro della (1.5.5) è una funzione della sola η , anche il secondo membro deve esserlo. Affinché sia soddisfatta questa condizione, $b u'_m / u_m$ e b' debbono essere indipendenti da x . Considerando il fatto che $b u'_m / u_m$ è proporzionale a $x^{q+p-1-p}$, cioè a x^{q-1} e che b' è proporzionale a x^{q-1} , la condizione di indipendenza da x equivale a porre $q=1$. Usando la (1.4.8) si ottiene $p=-1/2$. Pertanto, in conclusione

$$u_m \propto \frac{1}{\sqrt{x}}; \quad b \propto x.$$

1.6. Equazione integrale dell'energia del campo di moto medio.

Si moltiplichi la (1.3.4) per ρu e si integri tra $y=0$ e $y=\infty$. Si ottiene

$$\int_0^\infty \rho u^2 \frac{\partial u}{\partial x} dy + \int_0^\infty \rho u v \frac{\partial u}{\partial y} dy = \int_0^\infty u \frac{\partial \tau_t}{\partial y} dy.$$

Sia $E = \rho u^2 / 2$ l'energia cinetica per unità di volume. Si ottiene

$$\int_0^{\infty} \rho u^2 \frac{\partial u}{\partial x} dy = \int_0^{\infty} u \frac{\partial}{\partial x} \frac{\rho u^2}{2} dy = \int_0^{\infty} u \frac{\partial E}{\partial x} dy$$

$$\int_0^{\infty} \rho uv \frac{\partial u}{\partial y} dy = \int_0^{\infty} v \frac{\partial E}{\partial y} dy$$

$$\int_0^{\infty} \rho u^2 \frac{\partial u}{\partial x} dy + \int_0^{\infty} \rho uv \frac{\partial u}{\partial y} dy = \int_0^{\infty} \left(u \frac{\partial E}{\partial x} + v \frac{\partial E}{\partial y} \right) dy = \int_0^{\infty} \frac{DE}{Dt} dy$$

in cui si è indicato con D/Dt la derivata totale e, in particolare DE/Dt rappresenta la variazione temporale dell'energia cinetica.

Inoltre integrando per parti si ha

$$\int_0^{\infty} u \frac{\partial \tau_t}{\partial y} dy = [u \tau_t]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} \tau_t \frac{\partial u}{\partial y} dy = - \int_0^{\infty} \tau_t \frac{\partial u}{\partial y} dy$$

dove $\tau_t \partial u / \partial y$ rappresenta la produzione di energia turbolenta. In definitiva si ottiene

$$\int_0^{\infty} \frac{DE}{Dt} dy = - \int_0^{\infty} \tau_t \frac{\partial u}{\partial y} dy$$

dalla quale si evince che la riduzione dell'energia cinetica del campo di moto medio sia un fenomeno che *alimenta* la turbolenza, altrimenti incapace di autosostenersi. Al fine di determinare q e p , con un approccio diverso da quello utilizzato nel par. 1.5. conviene riscrivere la precedente relazione come segue

$$\int_0^{\infty} u \frac{\partial E}{\partial x} dy = \int_0^{\infty} u \frac{\partial}{\partial x} \frac{\rho u^2}{2} dy = \int_0^{\infty} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\rho u^2}{2} u \right) - \frac{\rho u^2}{2} \frac{\partial u}{\partial x} \right] dy$$

$$\int_0^{\infty} v \frac{\partial E}{\partial y} dy = \int_0^{\infty} v \frac{\partial}{\partial y} \frac{\rho u^2}{2} dy = [v \frac{\rho u^2}{2}]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} \frac{\rho u^2}{2} \frac{\partial v}{\partial y} dy = \int_0^{\infty} \frac{\rho u^2}{2} \frac{\partial u}{\partial x} dy$$

Sommando tra loro le due precedenti equazioni si ottiene

$$\int_0^{\infty} u \frac{\partial E}{\partial x} dx + \int_0^{\infty} v \frac{\partial E}{\partial y} dy = \int_0^{\infty} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\rho u^2}{2} u \right) dy = \frac{d}{dx} \int_0^{\infty} \frac{\rho u^2}{2} u dy.$$

Si può infine scrivere che

$$\frac{d}{dx} \int_0^{\infty} \frac{\rho u^2}{2} u dy = - \int_0^{\infty} \tau_t \frac{\partial u}{\partial y} dy.$$

Per le assunzioni fatte nei paragrafi precedenti è possibile scrivere

$$\frac{d}{dx} \int_0^{\infty} \frac{\rho}{2} b u_m^3 f^3 d\eta = - \int_0^{\infty} \rho u_m^2 g u_m f' d\eta$$

$$\frac{d}{dx} b u_m^3 \int_0^{\infty} \frac{1}{2} f^3 d\eta = - u_m^3 \int_0^{\infty} g f' d\eta. \quad (1.6.1)$$

Si ponga

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{2} f^3 d\eta = F_1 \quad \int_0^{\infty} g f' d\eta = F_2$$

in cui F_1 e F_2 sono due costanti. Pertanto la (1.6.1) potrà essere riscritta come segue

$$\frac{\frac{d}{dx}(b u_m^3)}{u_m^3} = - \frac{F_2}{F_1}$$

cioè

$$\frac{\frac{d}{dx}(bu_m^3)}{u_m^3} \propto x^0$$

ossia

$$q + 3p - 1 - 3p = 0$$

da cui $q=1$ e, per la (1.4.8), $p=-1/2$.

1.7. Ipotesi di intrusione del fluido ambiente.

Se Q è la portata per unità di lunghezza in ogni sezione del getto si avrà

$$Q = 2 \int_0^{\infty} u dy.$$

Se Q_0 è la portata uscente dall'orifizio, le risultanze sperimentali hanno messo in evidenza che $Q(x)/Q_0$ è maggiore dell'unità e che aumenta con x . Questo significa che il getto provoca l'intrusione del fluido circostante durante il suo moto.

Si faccia la seguente posizione

$$\frac{dQ}{dx} = 2 \frac{d}{dx} \int_0^{\infty} u dy = 2 v_e$$

in cui si è indicato con v_e la cosiddetta velocità di intrusione (*entrainment velocity*). Ovviamente v_e rappresenta in generale il modulo della velocità di intrusione. Da considerazioni proprie dell'analisi dimensionale si può scrivere

$$v_e \propto u_m$$

ossia

$$v_e = \alpha_e u_m$$

avendo indicato con α_e il coefficiente di intrusione legato a u_m . Pertanto

$$\frac{d}{dx} \int_0^{\infty} u dy = \alpha_e u_m$$

$$\frac{\frac{d}{dx} (u_m b) \int_0^{\infty} f d\eta}{u_m} = \alpha_e$$

$$\frac{\frac{d}{dx} (u_m b)}{u_m} \propto x^0.$$

Ossia $p+q-1-p=0$, cioè $q=1$. Per la (1.4.8) $p=-1/2$. L'ipotesi di intrusione è stata introdotta da Morton et al. (1956).

1.8. Equazione del momento della quantità di moto.

Si moltiplichi l'equazione del moto (1.3.4) per y e la si integri da $y=0$ a $y=\infty$. Si ottiene

$$\int_0^{\infty} u y \frac{\partial u}{\partial x} dy = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{\partial}{\partial x} y u^2 dy = \frac{1}{2} \frac{d}{dx} \int_0^{\infty} y u^2 dy$$

$$\int_0^{\infty} v y \frac{\partial u}{\partial y} dy = [u v y]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} u \frac{\partial v y}{\partial y} dy = - \int_0^{\infty} u \left(v + y \frac{\partial v}{\partial y} \right) dy =$$

$$= \int_0^{\infty} u y \frac{\partial u}{\partial x} dy - \int_0^{\infty} u v dy = \frac{1}{2} \frac{d}{dx} \int_0^{\infty} y u^2 dy - \int_0^{\infty} u v dy.$$

Sommando le ultime due equazioni si ottiene

$$\int_0^{\infty} u y \frac{\partial u}{\partial x} dy + \int_0^{\infty} v y \frac{\partial u}{\partial y} dy = \frac{d}{dx} \int_0^{\infty} y u^2 dy - \int_0^{\infty} u v dy$$

ossia

$$\frac{1}{\rho_0} \int_0^{\infty} y \frac{\partial \tau_t}{\partial y} dy = \frac{1}{\rho} \left(| \tau_y |_0^{\infty} - \int_0^{\infty} \tau_t dy \right) = - \frac{1}{\rho_0} \int_0^{\infty} \tau_t dy.$$

L'equazione del momento della quantità di moto diviene

$$\frac{d}{dx} \int_0^{\infty} \rho u^2 y dy = \int_0^{\infty} \rho u v dy - \int_0^{\infty} \tau_t dy. \quad (1.8.1)$$

Sostituendo la (1.5.3) nel primo termine del secondo membro si ottiene

$$\int_0^{\infty} \rho u v dy = \int_0^{\infty} u_m f [u_m b' J_1(\eta) - u'_m b J_2(\eta)] b d\eta \quad (1.8.2)$$

con

$$J_1(\eta) = \eta f - \int_0^{\eta} f d\eta$$

e

$$J_2(\eta) = \int_0^{\eta} f d\eta.$$

Tenuto conto delle (1.4.3), (1.5.1) e (1.8.2), la (1.8.1) diviene

$$\frac{d}{dx} \rho u_m^2 b^2 \int_0^{\infty} \eta f^2 d\eta = \rho u_m^2 b b' \int_0^{\infty} J_1(\eta) d\eta - \rho u_m u'_m b^2 \int_0^{\infty} J_2(\eta) d\eta - \rho u_m^2 b \int_0^{\infty} g d\eta.$$

Ponendo

$$\int_0^{\infty} \eta f^2 d\eta = F_3 \quad \int_0^{\infty} J_1(\eta) d\eta = F_4 \quad \int_0^{\infty} J_2(\eta) d\eta = F_5 \quad \int_0^{\infty} g d\eta = F_6$$

in cui F_3 , F_4 , F_5 e F_6 sono costanti, la (1.8.1) diviene

$$F_4 \frac{d}{dx} (u_m^2 b^2) - F_5 u_m^2 b b' + F_6 u_m u_m' b^2 + F_7 u_m^2 b = 0.$$

Affinché quest'ultima equazione possa essere soddisfatta è necessario che

$$2p + 2q - 1 = 0$$

$$2p + q = 0$$

La risoluzione del precedente sistema porta a concludere, con un altro procedimento, che $q=1$ e $p=-1/2$.

1.9. Analisi dimensionale.

Utilizzando i principi propri dell'analisi dimensionale si possono ottenere delle espressioni per le scale di velocità e di lunghezza dei getti. Si farà sempre riferimento ad un getto piano per il quale si può scrivere che

$$u_m = f_1(M_0, \rho, x). \quad (1.9.1)$$

Nei getti piani se il numero di Reynolds allo sbocco $Re=2b_0 U_0/\nu$ è maggiore di alcune migliaia, si può ritenere che l'effetto della viscosità sia trascurabile. Usando il teorema di Buckingham la (1.9.1) diviene

$$\frac{u_m}{\sqrt{M_0/\rho x}} = C'_1 \quad (1.9.2)$$

con C'_1 costante. Poiché $M_0=2b_0 \rho U_0^2$, la (1.9.2) si riduce a

$$\frac{u_m}{U_0} = \frac{\sqrt{2C'_1}}{\sqrt{x/b_0}} = \frac{C_1}{\sqrt{x/b_0}}.$$

L'incognita C_1 potrà essere valutata impiegando i dati rilevati sperimentalmente.

Per quanto attiene la scala delle lunghezze si ha

$$b = f_2(M_0, \rho, x).$$

La precedente equazione si riduce a

$$\frac{b}{x} = C_2$$

o

$$\frac{b}{b_0} = C_2 \frac{x}{b_0}.$$

Anche per quanto attiene l'incognita C_2 , essa sarà valutata impiegando i dati rilevati sperimentalmente.

Per quanto attiene la portata volumetrica Q per ogni sezione si ha

$$Q = C'_3 \sqrt{M_0 x / \rho}$$

o

$$\frac{Q}{Q_0} = C_3 \sqrt{x/b_0}$$

con C_3 incognita da ottenersi dalle risultanze sperimentali.

1.10. Risultati sperimentali riportati in letteratura.

Sperimentazioni sistematiche sui getti turbolenti piani sono state condotte da molti autori. Una conclusione normalmente accettata è che la distribuzione di velocità longitudinale possa essere rappresentata in maniera soddisfacente attraverso una funzione di tipo gaussiana. Zijnen (1958) trovò che

$$\frac{u}{u_m} = \exp(-a' \lambda^2)$$

con a' variabile tra 70.7 e 75.0 e $\lambda = y/x$. Un'altra espressione spesso utilizzata è

$$\frac{u}{u_m} = \exp(-0.693 \eta^2). \quad (1.10.1)$$

Molti autori si sono soffermati ad analizzare l'*origine virtuale del getto*, ossia l'origine rispetto alla quale misurare le distanze longitudinali del getto. Come si evince dalla fig. 1.1.1 non è detto che questa coincida con la sezione di sbocco. La coordinata x corretta in funzione dell'origine virtuale, attraverso un'operazione di traslazione, verrà indicata nel seguito con x' . Alcuni autori ritengono che l'origine virtuale sia dietro l'ugello; altri, invece, in evidente contrasto con i primi, ritengono di poter porre l'origine virtuale di fronte all'ugello. Proprio a causa di questa incertezza, Rajaratnam (1976) propone di porre l'origine virtuale in corrispondenza dell'orifizio. Accettando questa ipotesi, la coordinata x' diviene identica alla x .

Secondo Tollmien (1926), che per la risoluzione del problema idrodinamico dei getti turbolenti fa uso della lunghezza di mescolamento di Prandtl, si ha

$$\frac{u_m}{U_0} = \frac{1.21}{\sqrt{a}} \frac{1}{\sqrt{x/b_0}} \quad (1.10.2)$$

con a coefficiente sperimentale.

Secondo Goertler (1942), che assume l'equazione di Prandtl $\tau_t = \rho \varepsilon \partial u / \partial y$ ai fini della soluzione del problema idrodinamico dei getti turbolenti, essendo ε la viscosità cinematica turbolenta (*eddy viscosity*), si ha

$$\frac{u}{u_m} = 1 - \tanh^2\left(\frac{\sigma y}{x}\right)$$

e

$$\frac{v}{u_m} = \frac{1}{\sigma} \left(\frac{\sigma y}{x} - \frac{\sigma y}{x} \tanh^2 \frac{\sigma y}{x} - 0.5 \tanh \frac{\sigma y}{x} \right)$$

I risultati sperimentali di Forthmann (1934) e di Abramovich (1963) hanno messo in evidenza che il coefficiente a dell'eq. (1.10.2) proposta da Tollmien varia tra 0.09 a 0.12, con un valore medio di 0.10. Assumendo quest'ultimo valore, nella (1.10.2) si ha

$$\frac{u_m}{U_0} = \frac{3.78}{\sqrt{x/b_0}}.$$

Zijnen (1958) trovò che per un orifizio delle dimensioni di $0.5 \times 10 \text{ cm}^2$ vale la seguente relazione

$$\frac{u_m}{U_0} = \frac{3.52}{\sqrt{x/b_0}} = \frac{3.52}{\sqrt{(x' + 1.2b_0)/b_0}}$$

e per un orifizio delle dimensioni di $1 \times 25 \text{ cm}^2$

$$\frac{u_m}{U_0} = \frac{3.12}{\sqrt{x/b_0}} = \frac{3.12}{\sqrt{(x' + 2.40b_0)/b_0}}.$$

Albertson et al. (1950) dai loro risultati sperimentali ricavarono

$$\frac{u_m}{U_0} = \frac{3.24}{\sqrt{x'/b_0}}.$$

Tutte le equazioni citate mostrano che, in generale, è possibile scrivere

$$\frac{u_m}{U_0} = \frac{C_1}{\sqrt{\frac{x' + C_* b_0}{b_0}}}$$

con C_1 variabile tra 3.12 e 3.78 e C_* variabile tra 0 e 2.40. Per la pratica progettazione si può assumere C_1 uguale a 3.50 e C_* nullo, pervenendo alla seguente soluzione

$$\frac{u_m}{U_0} = \frac{3.50}{\sqrt{x'/b_0}}.$$

Per quanto attiene la scala delle lunghezze b , definita come la distanza dall'asse del getto in cui la velocità u è $u_m/2$, è valida la relazione $b=C_2x$. La soluzione di Tollmien con $a=0.10$ porta a $C_2=0.097$. La soluzione di Goertler con $\sigma=7.67$ porta ad un valore di C_2 uguale a 0.114. Rajaratnam propone per C_2 un valore intermedio uguale a 0.10.

Per il coefficiente di intrusione α_e , poiché

$$v_e = \frac{d}{dx} \int_0^\infty u dy = \frac{d}{dx} u_m b \int_0^\infty f d\eta$$

utilizzando il valore di $C_2=0.10$ si ottiene

$$\alpha_e = \frac{v_e}{u_m} = 0.053.$$

Per quanto riguarda la portata Q si ha che

$$\frac{Q}{Q_0} = C_3 \sqrt{x/b_0}.$$

Albertson et al. (1950) trovarono che $C_3=0.44$.

Indicando con E l'energia cinetica nella generica sezione si ha che

$$\frac{E}{E_0} = \frac{C_1^3 C_2 \int_0^{\infty} f^3 d\eta}{\sqrt{x/b_0}}$$

avendo indicato con E_0 l'energia cinetica in corrispondenza dell'orifizio. Utilizzando la (1.10.1) per f e ponendo $C_1=3.50$ e $C_2=0.10$ si ottiene

$$\frac{E}{E_0} = \frac{2.64}{\sqrt{x/b_0}}.$$

Utilizzando i propri risultati sperimentali, Zijnen (1958) studiò la variazione della lunghezza di mescolamento e della viscosità cinematica turbolenta (*eddy viscosity*). Dalla fig. 1.10.1.a si osserva che per $\lambda > 0.07$, $1/x$ diviene costante e uguale a 0.0229, ma per valori più piccoli l'ipotesi di costanza della lunghezza di mescolamento non è più valida. La fig. 1.10.1.b mostra che $\varepsilon/u_m x$ è costante per $\lambda < 0.04$, ma decresce leggermente per valori di $\lambda > 0.04$. Questo potrebbe giustificare la divergenza tra i valori sperimentali e quelli teorici di Goertler nella zona esterna del getto.

Alcune misurazioni sulla turbolenza sono state realizzate da Zijnen (1958), Miller e Comings (1957) e da Heskestad (1965). Quest'ultimo, dai suoi rilievi sperimentali, concluse che la turbolenza può ritenersi completamente sviluppata (ipotesi di *self-preserving*) per x'/b_0 maggiore di circa 130, essendo x' la coordinata longitudinale del getto con origine virtuale.

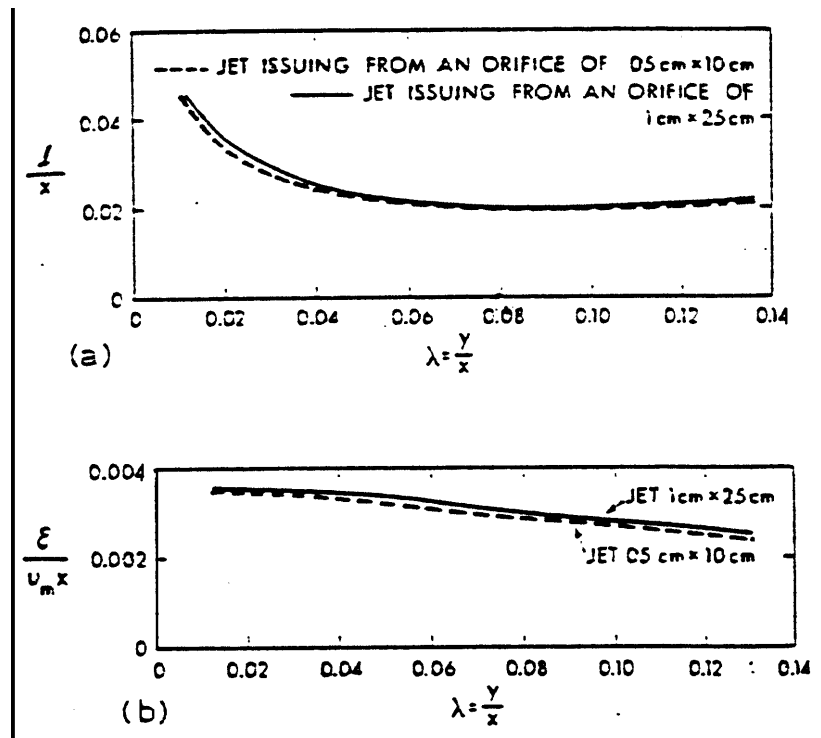


Fig. 1.1.1. Lunghezza di mescolamento e viscosità turbolenta di un getto piano (da Zijnen, 1958a).