

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_t}{\partial r} \quad (3.1.1)$$

$$\frac{\partial ru}{\partial x} + \frac{\partial rv}{\partial r} = 0$$

con $u = U_1 + U$ e con ovvio significato degli altri simboli.

Moltiplicando l'equazione (3.1.1) per ρr e integrando da $r=0$ a $r=\infty$, si ottiene

$$\int_0^\infty \rho u r \frac{\partial u}{\partial x} dr + \int_0^\infty \rho v r \frac{\partial u}{\partial r} dr = \int_0^\infty \frac{\partial \tau_t}{\partial r} dr \quad (3.1.2)$$

$$\int_0^\infty \rho u r \frac{\partial u}{\partial x} dr = \frac{\rho}{2} \int_0^\infty r \frac{\partial u^2}{\partial x} dr = \frac{\rho}{2} \int_0^\infty \frac{\partial(\rho u^2)}{\partial x} dr = \frac{1}{4\pi} \frac{d}{dx} \int_0^\infty 2\pi r dr \rho u^2$$

$$\int_0^\infty \rho v r \frac{\partial u}{\partial r} dr = [\rho u v r]_0^\infty - \int_0^\infty \rho u \frac{\partial r v}{\partial r} dr = \rho U_1 \int_0^\infty \frac{\partial r v}{\partial r} dr + \int_0^\infty \rho u \frac{\partial r u}{\partial x} dr =$$

$$= \frac{1}{2} \frac{d}{dx} \int_0^\infty r \rho u^2 dr - \rho U_1 \int_0^\infty \frac{\partial r u}{\partial x} dr =$$

$$= \frac{1}{4\pi} \frac{d}{dx} \int_0^\infty 2\pi r \rho u^2 dr - \frac{1}{2\pi} \frac{d}{dx} \int_0^\infty 2\pi r \rho u U_1 dr.$$

Pertanto

$$\int_0^\infty \rho u r \frac{\partial u}{\partial x} dr + \int_0^\infty \rho v r \frac{\partial u}{\partial r} dr = \frac{1}{2\pi} \frac{d}{dx} \int_0^\infty 2\pi r \rho u^2 dr - \frac{1}{2\pi} \frac{d}{dx} \int_0^\infty 2\pi r \rho u U_1 dr =$$

$$\frac{1}{2\pi} \frac{d}{dx} \int_0^\infty 2\pi r \rho u (u - U_1) dr.$$

Inoltre

$$\int_0^{\infty} \frac{\partial r \tau_t}{\partial r} dr = [r \tau_t]_0^{\infty} = 0.$$

Pertanto la (3.1.2) diviene

$$\frac{1}{2\pi} \frac{d}{dx} \int_0^{\infty} 2\pi r \rho u (u - U_1) dr = 0. \quad (3.1.3)$$

L'eq. (3.1.3) consente di affermare che l'eccesso del flusso della quantità di moto del getto lungo la direzione assiale si conserva. Eliminando il fattore 2π e ρ per convenienza, si potrà scrivere l'equazione integrale della quantità di moto come segue

$$\frac{d}{dx} \int_0^{\infty} r u (u - U_1) dr = 0. \quad (3.1.4)$$

Le analisi sperimentali hanno messo in evidenza che le distribuzioni di velocità relative al moto uniforme del fluido ambiente sono simili, cioè

$$\frac{u - U_1}{u_m - U_1} = \frac{U}{U_m} = f\left(\frac{r}{b}\right) = f(\eta) \quad (3.1.5)$$

dove si è assunta $U_m = u_m - U_1$ come scala di velocità e b , precedentemente definita, come scala di lunghezza. Sostituendo la (3.1.5) nella (3.1.4) e semplificando si ottiene

$$\frac{d}{dx} \int_0^{\infty} b^2 \eta (U_1 U_m f + U_m^2 f^2) d\eta = 0.$$

Dividendo la precedente equazione per U_1 si ottiene

$$\frac{d}{dx} \int_0^{\infty} b^2 \eta \left[\frac{U_m}{U_1} f + \left(\frac{U_m}{U_1} \right)^2 f^2 \right] d\eta = 0.$$

E' conveniente, ora, distinguere due casi estremi: il primo, in cui si ipotizza che il getto sia caratterizzato da $U_m/U_1 \gg 1$ e il secondo in cui $U_m/U_1 \ll 1$. Di solito i getti che soddisfano la prima condizione sono noti come getti composti *forti*; quelli che soddisfano la seconda condizione sono detti getti composti *deboli*.

Nel primo caso la (3.1.6) si riduce a

$$\frac{d}{dx} \int_0^\infty b^2 \eta \left(\frac{U_m}{U_1} \right)^2 f^2 d\eta \equiv 0$$

ossia

$$\frac{d}{dx} \int_0^\infty b^2 \eta U_m^2 f^2 d\eta = 0.$$

Semplificando si ottiene

$$\frac{d}{dx} (b^2 U_m^2) \int_0^\infty \eta f^2 d\eta = 0.$$

L'integrale della precedente equazione è una costante e pertanto

$$\frac{d}{dx} (b^2 U_m^2) = 0.$$

Si assuma ora

$$U_m \propto x^p \quad b \propto x^q. \quad (3.1.7)$$

Allora si ha che $2p+2q=0$, ossia $p+q=0$.

Nel secondo caso ($U_m \ll U_1$) si ha che

$$\frac{d}{dx} \int_0^\infty b^2 \eta \frac{U_m}{U_1} f d\eta = 0$$

ossia

$$\frac{d}{dx} \int_0^\infty b^2 \eta U_m f d\eta = 0.$$

Semplificando ulteriormente si ottiene

$$\frac{d}{dx} b^2 U_m \int_0^\infty \eta f d\eta = 0$$

ossia

$$\frac{d}{dx} (b^2 U_m) = 0$$

che dà luogo alla relazione: $p+2q=0$.

Quando U_m è dello stesso ordine di grandezza di U_1 , teoricamente non è possibile pervenire a relazioni di similitudine tipo le (3.1.7), non potendosi avere un'univoca relazione per p e q . Limitandosi, dunque, ai due casi estremi, la valutazione dei parametri p e q richiede, al solito, un'ulteriore equazione che può essere ottenuta attraverso considerazioni di similitudine.

3.2. Leggi di similitudine.

Si ponga

$$u = U_1 + U_m f$$

da cui

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{U_m b'}{b} \eta f' + U'_m f$$

e, dunque

$$u \frac{\partial u}{\partial x} = U_1 U'_m f + U_m U'_m f^2 - \frac{U_1 U_m b'}{b} \eta f' - \frac{U_m^2 b'}{b} \eta f f'.$$

Si integri l'equazione di continuità per ricavare un'espressione per la v

$$\begin{aligned} r v &= \int_0^r \frac{\partial r v}{\partial r} dr = - \int_0^r \frac{\partial r u}{\partial x} dr = \int_0^r r \left(\frac{U_m b'}{b} \eta f' - U'_m f \right) dr = \int_0^\eta (U_m b' \eta^2 f' - b U'_m \eta f) b d\eta = \\ &= U_m b' b \int_0^\eta \eta^2 f' d\eta - b^2 U'_m \int_0^\eta \eta f d\eta. \end{aligned}$$

Si ricava

$$v = U_m b' \frac{1}{\eta} \int_0^\eta \eta^2 f' d\eta - b U'_m \frac{1}{\eta} \int_0^\eta \eta f d\eta$$

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{U_m f'}{b}$$

$$v \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{U_m^2 b'}{b} \frac{f'}{\eta} \int_0^\eta \eta^2 f' d\eta - U_m U'_m \frac{f'}{\eta} \int_0^\eta \eta f d\eta.$$

Si ponga

$$\frac{\tau}{\rho U_m^2} = g(\eta).$$

Allora si ottiene

$$\frac{\partial r}{\partial r} \tau_t = \frac{\partial}{\partial r} = \frac{U_m^2}{b} \left(\frac{g}{\eta} + g' \right).$$

Sostituendo la precedente espressione nella (3.1.1) e semplificando si ottiene

$$\begin{aligned} \frac{bU_1U'_m}{U_m^2} \eta f + bU'_mU_m \left(\eta f^2 - f' \int_0^\eta \eta f d\eta \right) - \frac{U_1}{U_m} b' \eta^2 f' - b' \left(\eta^2 f f' - f' \int_0^\eta \eta^2 f' d\eta \right) = \\ = g + \eta g'. \end{aligned} \quad (3.2.1)$$

Si assuma che i termini della (3.2.1), dipendenti da η , abbiano gli stessi ordini di grandezza. Allora il primo e il terzo termine della (3.2.1) sono proporzionali a $(U_1/U_m x^{q-1})$, mentre il secondo e il quarto sono proporzionali a x^{q-1} . Per getti caratterizzati da $U_m \gg U_1$, la (3.2.1) si riduce a

$$\frac{bU'_m}{U_m} \left(\eta f^2 - f' \int_0^\eta \eta f d\eta \right) - b' \left(\eta^2 f f' - f' \int_0^\eta \eta^2 f' d\eta \right) = g + \eta g'.$$

Dalla precedente equazione si ricava

$$\frac{bU'_m}{U_m} \propto x^0 \quad (3.2.2)$$

$$b' \propto x^0.$$

Dalla (3.2.2) si ricava $q=1$.

Con $q=1$ e per quanto detto in precedenza, si ottiene $p=-1$. Pertanto per i getti circolari composti forti si ottiene

$$U_m \propto \frac{1}{x} \quad b \propto x.$$

Per i getti deboli la (3.2.2) si riduce a

$$\frac{bU_1U'_m}{U_m^2}\eta f - \frac{U_1b'}{U_m}\eta^2 f' = g + \eta g'.$$

Pertanto si ricava

$$\frac{bU'_m}{U_m^2} \propto x^0 \quad \frac{b'}{U_m} \propto x^0. \quad (3.2.3)$$

Dall'eq. (3.2.3) si ottiene: $q-p-1=0$. Quest'ultima relazione, tenuto conto dei risultati precedentemente esposti, fornisce: $q=1/3$ e $p=-2/3$. Pertanto per i getti circolari composti deboli si ha

$$U_m \propto \frac{1}{x^{2/3}} \quad b \propto x^{1/3}.$$

3.3. Considerazioni dall'analisi dimensionale.

Il fenomeno in istudio può essere così rappresentato

$$U_m = f_1(M_0, \rho, x).$$

Utilizzando il teorema di Buckingham, la precedente equazione diviene

$$\frac{U_m}{\sqrt{M_0 / \rho x^2}} = \text{costante } C' \quad (3.3.1)$$

ossia

$$(3.3.2)$$

$$\frac{U_m}{\sqrt{U_0(U_0 - U_1)}} = \frac{C_1}{x/r_0}.$$

La precedente equazione può anche essere posta nel modo seguente

$$\frac{U_m}{U_1} = \frac{C_1}{x/\theta}$$

avendo indicato con θ lo spessore della quantità di moto definito come segue

$$M_0 = \pi r_0^2 \rho U_0 (U_0 - U_1) = \pi \theta^2 \rho U_1^2$$

con

$$\theta = r_0 \sqrt{\alpha(\alpha - 1)}$$

essendo $\alpha = U_0/U_1$. Se pertanto nella (3.3.1) si introduce la variabile U_1 , si ottiene la più generale relazione

$$\frac{U_m}{U_1} = f\left(\frac{x}{\theta}\right).$$

Per quanto attiene la scala delle lunghezze si ha

$$b = C_2 x.$$

E' da notare, dunque, che l'analisi dimensionale non porta a una diversa dipendenza da x a seconda che il getto sia forte o debole.

3.4. Risultati sperimentali in letteratura per i getti circolari composti.

Esperienze sui getti circolari composti sono state svolte da molti autori. Si ricordano

i lavori di Forstall e Shapiro (1950), Landis e Shapiro (1951), Tani e Kobashi (1951), Kobashi (1952), Maczynski (1962) e Antonia e Bilger (1973). Le esperienze di Forstall e Shapiro coprono un vasto range di valori di U_m/U_1 e, per l'intero range, i risultati sembrano suggerire una legge del tipo $U_m \propto 1/x$. Anche le esperienze di Tani e Kobashi (1951) confermano questo trend.

Si osserva, pertanto, che mentre la teoria porta a concludere che $U_m \propto 1/x^{2/3}$ per $U_m/U_1 \ll 1$, i lavori sperimentali di diversi ricercatori portano a concludere che $U_m \propto 1/x$, in accordo con l'analisi dimensionale secondo la (3.3.2).

Forstall e Shapiro suggeriscono la seguente relazione

$$\frac{U_m}{U_0 - U_1} = \frac{4 + 12U_1/U_0}{x/2r_0}.$$

Bradbury (1967) propone

$$\frac{U_m}{\sqrt{U_0(U_0 - U_1)}} = \frac{12.6}{x/r_0}$$

I dati di Antonia e Bilger (1974) non sembrano presentare un accordo con la precedente equazione.