

4. GETTI INTERAGENTI CON UN CAMPO DI MOTO UNIFORME E TRASVERSALE AL LORO ASSE.

Nei paragrafi precedenti si sono analizzati i getti immessi in un campo di liquido in quiete o in moto uniforme secondo la direzione dell'asse del getto stesso. Nel seguito si tratterà di un getto interagente con un campo di moto uniforme con direzione trasversale all'asse del getto stesso.

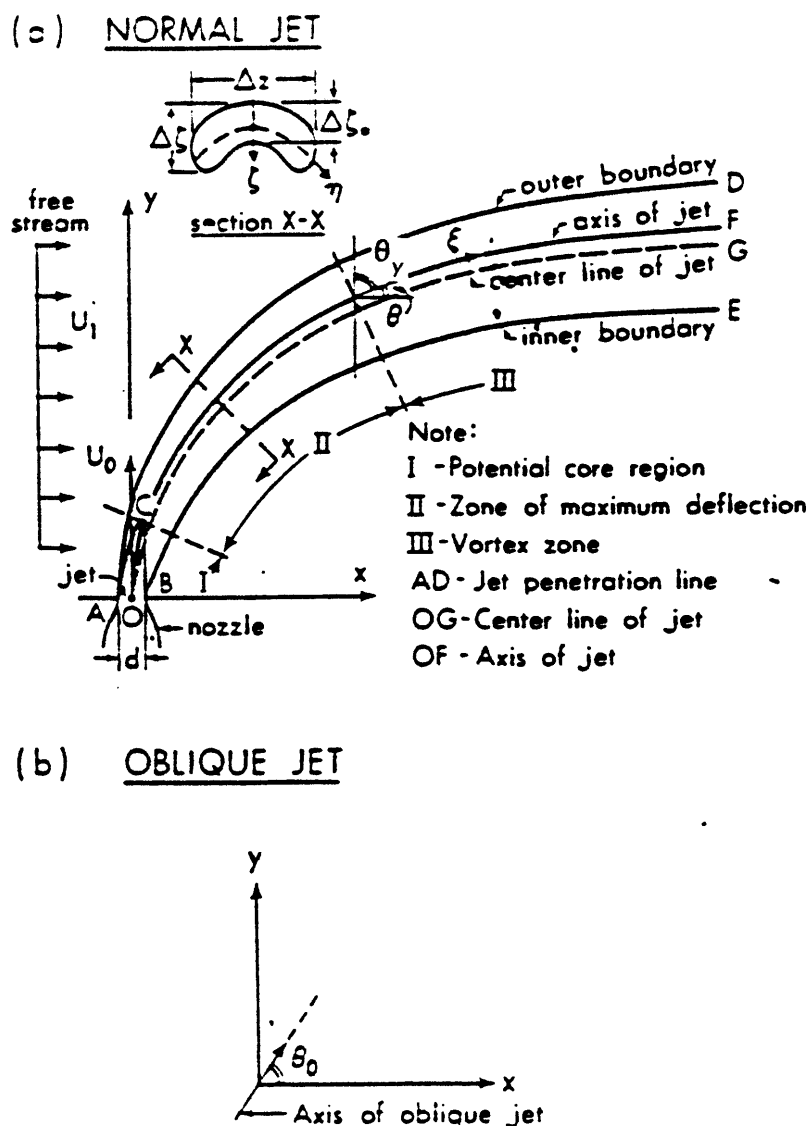


Fig. 4.1. Tipico esempio di un getto interagente con un campo di moto uniforme e trasversale rispetto al suo asse.

In queste condizioni il getto subisce una flessione verso la direzione del campo di moto del fluido esterno. Le osservazioni sperimentali di molti autori hanno messo in evidenza che in queste situazioni le sezioni normali all'asse dei getti hanno una classica

forma a rene, nota anche come *forma a ferro di cavallo*. Facendo riferimento alla fig. 4.1, si nota che anche per questi getti è possibile distinguere un *core*, che si estende dall'orifizio fino al punto C. Se si definisce con α il rapporto tra la velocità di uscita del getto, U_0 , e la velocità del campo di moto uniforme esterno, U_1 , Keffer e Baines (1963) hanno dimostrato che la lunghezza della zona del flusso a potenziale (lunghezza del *core*) ξ_0 è una funzione che dipende essenzialmente da α . In particolare gli Autori mettono in evidenza che se α è maggiore di 4 il punto C di fig. 4.1 si trova lungo la verticale passante per il baricentro dell'orifizio, mentre per valori più piccoli il punto C è deviato secondo il verso del campo di moto del fluido esterno.

A ridosso del *core*, si individua una *regione di massima flessione* (II regione di fig. 4.1) e, infine, una *regione dei vortici* (III regione di fig. 4.1).

In effetti, nelle regioni II e III si osserva che la tipica sezione a forma di rene è costituita da una coppia di vortici. In particolare nella regione II questi vortici, pur mantenendo una velocità angolare costante, aumentano di dimensione. Nella regione III, invece, si individua una ulteriore crescita delle dimensioni dei vortici e una riduzione della velocità angolare. Pratte e Baines (1967) hanno dimostrato l'esistenza di questi vortici a distanze anche fino a 1000 volte il diametro dell'ugello.

4.1. Descrizione dei getti soggetti a flessione.

Si faccia riferimento alla fig. 4.1; lo strato esterno AD rappresenta la penetrazione del getto nel campo di moto trasversale. Dall'analisi dimensionale, indicando con $R_0 = U_0 d / \nu$ il numero di Reynolds del getto in corrispondenza dell'orifizio, si ha che la coordinata y_0 di ogni punto della linea rappresentativa dello strato esterno AD per ogni assegnato x è data da

$$\frac{y_0}{d} = f_1 \left(\frac{x}{d}, \alpha = \frac{U_0}{U_1} \right)$$

Gordier (1959) propose una legge semplificata per α minore di 6

$$\frac{y_0}{d} = f_2 \left(\alpha \sqrt{\frac{x}{d}} \right).$$

Pratte et Baines (1967), riferendosi ai risultati sperimentali ottenuti, proposero la seguente relazione

$$\frac{y_0}{\alpha d} = 2.63 \left(\frac{x}{\alpha d} \right)^{0.28}.$$

La fig. 4.1.1 mostra i dati empirici e le curve che definiscono lo strato interno e la curva luogo geometrico dei punti in posizione intermedia tra lo strato interno e quello esterno (*curva centrale*) di un getto inflesso. Le equazioni di queste curve sono, rispettivamente, le seguenti

$$\frac{y_i}{\alpha d} = 1.35 \left(\frac{x}{\alpha d} \right)^{0.28}$$

$$\frac{y_c}{\alpha d} = 2.05 \left(\frac{x}{\alpha d} \right)^{0.28}.$$

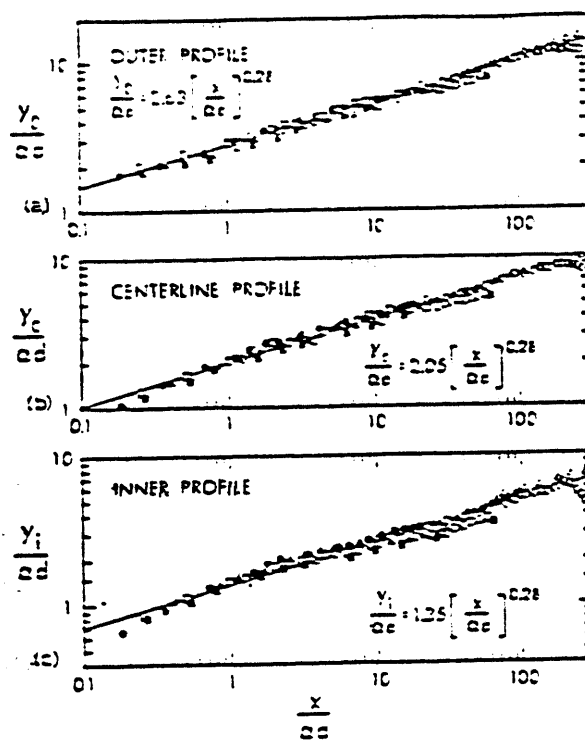


Fig. 4.1.1. Andamento dei profili esterno (a), centrale (b) ed interno (d).

Margason (1968) alla luce dei risultati sperimentali su getti caratterizzati da valori di α compresi tra 2 e 10 e x/d minore di 15, propose, per la curva centrale, la seguente equazione

$$\frac{y_c}{d} = 1.59 \alpha^{0.67} \left(\frac{x}{d} \right)^{0.33}.$$

La fig. 4.1.2 riporta l'andamento della coordinata y della curva centrale del getto adimensionalizzata con αd in funzione di $\xi/(\alpha d)$, essendo ξ la coordinata curvilinea dell'asse del getto e con ovvio significato degli altri simboli. Dalla figura si nota che i diversi dati sperimentali si dispongono su un'unica curva costituita da due tratti di retta, nel diagramma logaritmico. E' anche evidente l'esistenza di una zona di

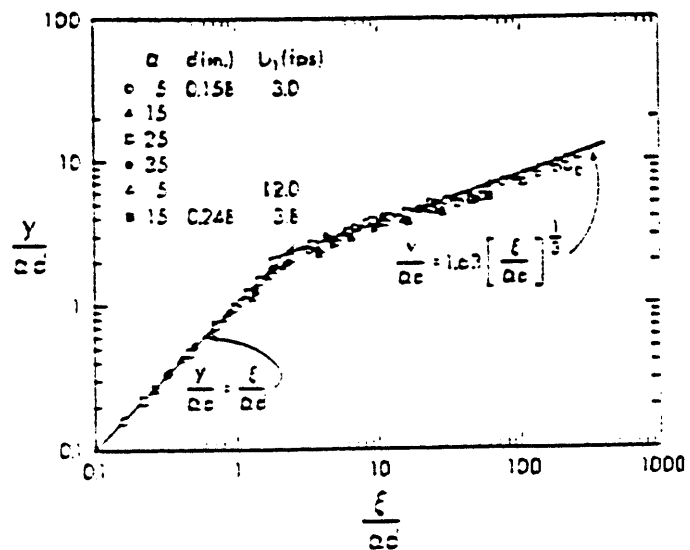


Fig. 4.1.2. Andamento della curva centrale del getto.

transizione. Il primo tratto di retta, di equazione $y = \xi$, si riferisce alla regione del *core* del getto. Il secondo tratto rettilineo (nel diagramma logaritmico) è descritto dall'equazione

$$\frac{y_c}{\alpha d} = 1.63 \left(\frac{\xi}{\alpha d} \right)^{1/3}.$$

Secondo Pratte e Baines (1967), a partire da $\xi/(\alpha d)$ all'incirca uguale a 5, inizia la regione dei vortici. La regione di raccordo tra i due tratti rettilinei rappresenta la zona di massima flessione del getto.

La linea OF di fig. 4.1 rappresenta l'asse del getto, ossia il luogo geometrico dei punti in corrispondenza dei quali la velocità è massima. Molte sono le espressioni empiriche per la determinazione dell'asse; si ricorda l'equazione di Shandorov (si veda Abramovich, 1963):

$$\frac{y}{d} = \alpha^{0.79} \left(\frac{x}{d} \right)^{0.39}$$

4.2. Getti obliqui rispetto al campo di moto esterno. Analisi dei metodi per la

determinazione dell'equazione dell'asse.

La sperimentazione sui getti obliqui è stata condotta da molti autori. Ivanov (si veda Abramovich, 1963) effettuò la sperimentazione per valori di θ_0 compresi tra 45° e 90° , avendo indicato con θ_0 l'angolo che l'asse del getto, all'uscita dall'orifizio, forma con la direzione del campo di moto esterno; Shandorov (si veda Abramovich, 1963) per θ_0 compresi tra 60° e 120° , Margason (1968) per θ_0 compresi tra 30° e 180° .

Nel seguito si descriveranno alcuni metodi per la determinazione dell'equazione dell'asse di un getto obliquo rispetto al campo di moto del fluido ambiente.

4.2.1. Metodo di Volinsky-Abramovich.

Questo metodo si basa su due ipotesi. La prima è la conservazione della quantità di moto del getto nella direzione ortogonale al campo di moto esterno; la seconda consiste nel ritenere che la flessione del getto sia imputabile alla differenza di pressione, agente sul getto, causata dal campo di moto esterno. Facendo riferimento alla fig. 4.1 è possibile scrivere le seguenti relazioni

$$a \rho u_m^2 \sin \theta = \frac{1}{4} \pi d^2 \rho U_0^2 \sin \theta_0 \quad (4.2.1.1)$$

$$C_d \frac{\rho U_1^2 \sin^2 \theta}{2} \Delta z d\xi = \frac{\rho a u_m^2 d\xi}{r} \quad (4.2.1.2)$$

in cui a è l'area della sezione del getto inflesso normale all'asse ξ , u_m è la velocità media nella sezione lungo la direzione ξ , θ è l'angolo che l'asse del getto forma con l'asse x , C_d è un coefficiente di drag, Δz è la larghezza del getto lungo la direzione z ed r è il raggio di curvatura dell'asse del getto. Nelle precedenti relazioni il noto coefficiente della quantità di moto, che tiene conto della distribuzione non uniforme della velocità nella sezione, è stato, per semplicità, posto uguale ad uno. Dalle osservazioni sperimentali di Shandorov è possibile dedurre che la forma a rene della sezione trasversale del getto (si veda la fig. 4.1) è caratterizzata da $\Delta z = 5\Delta\xi^*$. Sulla base di questi risultati Abramovich sostituì la forma,

inizialmente circolare del getto, con una di tipo ellittico avente semiasse maggiore $2.25d$ e semiasse minore $0.45d$. Tale sezione è, inoltre, caratterizzata dall'avere la stessa area della sezione circolare iniziale del getto. Inoltre, lo stesso Abramovich assunse la seguente relazione

$$\Delta z = 2.25d + 0.22\xi.$$

Al fine di semplificare le relazioni, la precedente equazione fu modificata come segue

$$\Delta z = 2.25d + 0.22x.$$

Attraverso la (4.2.1.1) e la (4.2.1.2), Abramovich ottenne la seguente equazione dell'asse del getto

$$\frac{y}{d} = \sqrt{39\Omega} \ln \left[\frac{10 + (x/d) + \sqrt{(x/d)^2 + 20(x/d) + 7\Omega \cot^2 \theta_0}}{10 + \sqrt{7\Omega} \cot \theta_0} \right]$$

con

$$\Omega = \frac{1}{C_d} \left(\frac{U_0}{U_1} \right)^2 \sin \theta_0.$$

Per il caso di getti con $\theta_0 = \pi/2$, ossia getti con asse inizialmente normale alla direzione del flusso esterno, la (4.2.1.3) si riduce alla seguente equazione

$$\frac{y}{d} = 14.4\sqrt{\Omega} \log \left[1 + 0.1 \frac{x}{d} \left(1 + \sqrt{1 + 20 \frac{d}{x}} \right) \right]$$

con $\Omega = 1/C_d (U_0/U_1)^2$. E' da notare, come evidenziato da Rajaratnam (1976), che quest'ultima relazione è in grado di ben interpretare i risultati sperimentali solo assumendo valori molto grandi di C_d , che non sono realistici.

4.2.2. Metodo di Crowe-Riesebietter.

Crowe e Riesebietter (1967) basarono la loro trattazione sull'ipotesi della conservazione della quantità di moto lungo la direzione assiale del getto, cioè

$$\rho a u_m^2 = \frac{1}{4} \pi d^2 \rho U_0^2.$$

La seconda ipotesi che essi introdussero è esprimibile attraverso la (4.2.1.2), assumendo, inoltre, la seguente relazione

$$\frac{\Delta z}{d} = \left(1 + N \frac{\xi}{d} \right)$$

in cui N è un coefficiente empirico. Risolvendo le tre precedenti equazioni, Crowe e Riesebietter ottennero la seguente relazione per la traiettoria del getto

$$\frac{x}{d} = \int_0^{y/d} \sinh \left[\frac{\bar{\eta} + N \int_0^{\bar{\eta}} \frac{\xi}{d} d\bar{\eta}}{\frac{1}{4} \pi (U_0^2 / (C_d U_1^2))} \right] d\bar{\eta} \quad (4.2.2.1)$$

con $\bar{\eta} = y/d$. Per il tratto iniziale della traiettoria si può assumere ξ all'incirca uguale a y e la (4.2.2.1) si semplifica come segue

$$\frac{x}{d} = \frac{C_d U_1^2}{\pi U_0^2} \left(\frac{y}{d} \right)^2 \left(1 + \frac{N y}{3 d} \right).$$

Facendo riferimento alle sperimentazioni eseguite su fluidi gassosi, Crowe e Riesebietter proposero per N la seguente relazione

$$N = 5.2 \left(\frac{U_0}{U_1} \right)^{-0.58}$$

La relazione di Crowe e Riesebieter riesce a interpretare meglio della relazione di Volinsky-Abramovich i dati sperimentali.

4.2.3. Metodo di Vizel-Mostinskii.

Vizel e Mostinskii (1965) basarono la loro trattazione sull'ipotesi della conservazione della quantità di moto in direzione ortogonale al campo di moto del fluido esterno. La seconda equazione assunta fu la seguente

$$\rho a u_m^2 \cos \theta = \rho \frac{1}{4} \pi d^2 U_0^2 \cos \theta_0 + C_d \frac{1}{2} \rho U_1^2 y < \Delta z >$$

avendo indicato con $< \Delta z >$ la larghezza media del getto. Anche in questo caso, la sezione trasversale circolare iniziale del getto fu sostituita da una ellittica di uguale area. Fu, infine, assunta la seguente ipotesi

$$\Delta z = 2.25d + 0.11x.$$

Con queste ipotesi, Vizel e Mostinskii (1965) ottennero la seguente relazione

$$\frac{y}{d} = 16.2 \left[\left(\frac{U_0}{U_1} \right)^2 \frac{1}{C_d} \log \left(1 + 0.049 \frac{x}{d} \right) \right]^{1/2}$$

4.2.4. Metodo di Platten e Keffer.

Il seguente metodo si basa su un approccio diverso dai precedenti. Platten e Keffer (1968) fecero uso delle seguenti tre equazioni

$$\frac{d}{d\xi} (\rho \beta a u_m^2 \cos \theta_y) = 0$$

$$\frac{d}{d\xi}(\rho\beta a_{um}^2 \sin\theta_y) = \rho c v_e U_1$$

$$\frac{d}{d\xi}(\rho a_{um}) = \rho c v_e$$

La prima equazione esprime, matematicamente, l'ipotesi della conservazione della quantità di moto del getto in direzione perpendicolare al campo di moto del fluido esterno. Si osserva che β è un coefficiente introdotto per tener conto della non uniformità dei valori di velocità in una data sezione, mentre θ_y è l'angolo che l'asse del getto forma con l'asse y.

La seconda equazione esprime, matematicamente, l'ipotesi secondo cui la quantità di moto in direzione del campo di moto del fluido esterno aumenta in funzione della quantità di moto del fluido di intrusione (*entrainment fluid*). Con c si è indicata la circonferenza del getto inflesso e v_e è la velocità di intrusione, normale all'asse del getto.

La terza equazione stabilisce che l'aumento della portata massica del getto è legata al processo di intrusione.

Il sistema di queste tre equazioni porta al seguente risultato

$$u_m = \Lambda / \left(\cos\theta_y + \beta \frac{\Lambda}{U_1} \sin\theta_y \right)$$

con

$$\Lambda = U_0 \cos\theta_{y0} / \left(1 - \beta \frac{U_0}{U_1} \sin\theta_{y0} \right)$$

essendo θ_{y0} il valore di θ_y in corrispondenza dell'orifizio.

Utilizzando le precedenti equazioni e facendo riferimento alle loro esperienze, Platten e Keffer (1968) ottennero la seguente equazione differenziale

$$\frac{d\theta_y}{dx} = \frac{U_1}{U_0} \frac{\sigma v_e (\cos\theta_y)^{3/2}}{(1/4\pi d^2 \cos\theta_{y0})^{1/2} \beta \Lambda} \left(1 + \frac{\beta}{U_1} \Lambda \tan\theta_y \right)$$

Per la soluzione della precedente equazione, Platten e Keffer fecero la seguente ipotesi

$$v_e = \alpha_e (u_m - U_1 \sin \theta_y) + \bar{\alpha}_e U_1 (\sin \theta_y - \sin \theta_{y0})$$

avendo indicato con α_e e $\bar{\alpha}_e$ due diversi coefficienti di intrusione (*entrainment coefficients*).

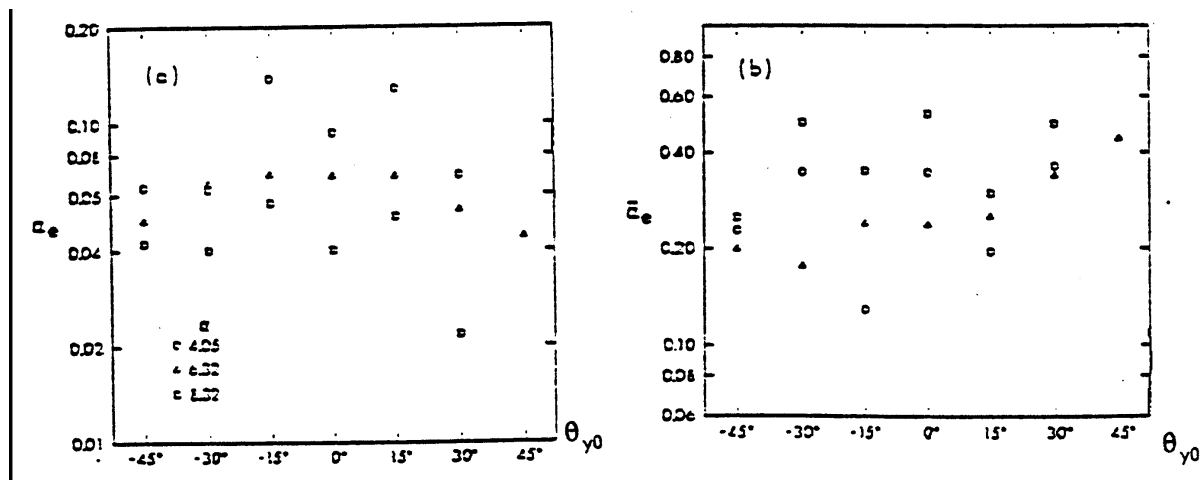


Fig. 4.2.4.1. Andamento dei coefficienti di intrusione per un getto turbolento circolare immerso in un campo di liquido trasversale al suo asse.

Si può assumere che α_e sia, grosso modo, lo stesso coefficiente di intrusione usato per i getti circolari in acqua ferma, mentre $\bar{\alpha}_e$ ingloba gli effetti di curvatura del getto. Dalle fig. 4.2.4.1 si evince che i valori di α_e e $\bar{\alpha}_e$ presentano una certa dispersione. Tuttavia è importante evidenziare che l'intrusione, per i getti immessi in un campo di fluido in moto in direzione trasversale al loro asse, è maggiore di un ordine di grandezza rispetto al caso dei getti in acqua ferma.

Questa conclusione è di fondamentale importanza al fine della diffusione del getto.