

5. PIUME E GETTI DI DENSITA' IMMESSI IN UN CAMPO DI FLUIDO IN QUIETE.

In precedenza si è analizzato il comportamento di un *getto puro*, intendendo con tale termine un getto caratterizzato dalla quantità di moto e non assoggettato a forze di galleggiamento. Si sono analizzati, in altri termini, i casi in cui la densità del fluido costituente il getto è uguale al fluido dell'ambiente esterno in cui veniva immesso.

Con il termine *piuma*, invece, si intende un flusso che ha inizio con un valore nullo di quantità di moto; affinché questo possa accadere è necessario che la densità del fluido costituente la piuma sia minore o maggiore della densità del fluido ambiente. Si avrà, rispettivamente, una piuma ascendente o discendente rispetto ad un sistema di riferimento con asse verticale orientato verso l'alto. Tipici esempi di getti puri sono i Geysers o i getti di lava e lapilli delle eruzioni vulcaniche. In tutti questi fenomeni è evidente l'esistenza di un processo di *conversione* di un alto valore di pressione in energia cinetica. Tipici esempi di piume sono i fumi delle ciminiere.

Tra questi due estremi, rappresentati dai *getti puri* e dalle *piume*, si presentano molti casi pratici intermedi che costituiscono i cosiddetti *getti di densità*, in cui sono presenti sia la quantità di moto iniziale sia un effetto di galleggiamento. Nel seguito si potrà utilizzare il termine generico *getto*, come fatto nei paragrafi precedenti, quando risulti chiaro dal contesto se si tratti di getti puri o di getti di densità.

Al fine della definizione delle leggi di variazione dei parametri fondamentali di un getto di densità si farà uso delle seguenti ipotesi semplificative:

1) Si assume che il fluido sia incomprimibile e il campo di moto turbolento.

2) Si assume che la variazione della densità del fluido del getto lungo la direzione del suo asse sia piccola in confronto ad una densità di riferimento, che, di solito, è la densità del fluido ambiente al livello dell'orifizio. Questa ipotesi, nota come *ipotesi di Boussinesq*, stabilisce che, sebbene la differenza di densità sia importante per quanto attiene i termini di galleggiamento, la sua variazione è trascurabile quando si considerino i termini inerziali dell'equazione di Navier-Stokes. Ossia, per i termini inerziali, si assume che $\rho_a(0) + \Delta\rho_1 = \rho_a(0) = \rho_a$, essendo ρ_a la densità di riferimento, precedentemente definita. Nel seguito si assumerà che il fluido ambiente non sia stratificato, ossia che esso sia caratterizzato da un unico valore di densità. L'ipotesi di Boussinesq è accettabile per la

maggior parte degli scarichi di effluenti.

3) Si assume che la densità del fluido sia una funzione lineare della concentrazione o della temperatura. Questa ipotesi è accettabile nella maggior parte dei casi pratici e cade in difetto, per esempio, quando la temperatura dell'acqua è prossima a 4°C, valore per il quale, come è noto, la densità dell'acqua raggiunge il suo massimo.

5.1. Analisi delle piume.

Nel seguito si riporteranno alcune tipiche formulazioni valide per le piume assialsimmetriche. Le piume, come accennato in precedenza, sono caratterizzate da un valore iniziale nullo sia della portata (flusso di volume) sia del flusso della quantità di moto e sono generate da una *sorgente di forze di galleggiamento*, intendendo con tale termine una qualunque causa che generi una variazione di densità tra il fluido della piuma e il fluido dell'ambiente esterno, come, per esempio, una sorgente di calore, un miscelatore in grado di produrre un fluido di densità diversa da quella del corpo idrico ricettore, una piastra elettrica, etc.

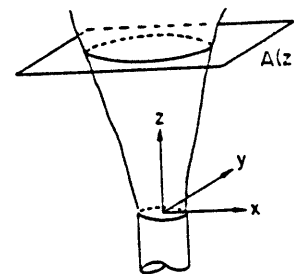


Fig. 5.2.1. Getto di densità e sistema di riferimento cartesiano adottato.

In questo caso, il moto è causato dalla forza che, per unità di massa, è localmente uguale al prodotto dell'accelerazione di gravità per il rapporto tra la variazione locale di densità tra fluido della piuma e fluido ambiente (ossia $\Delta\rho/\rho$) e la densità di riferimento (ossia ρ). Utilizzando l'ipotesi di Boussinesq e applicando l'analisi dimensionale, vale la seguente relazione

$$w_c, \Delta, b, = \phi(B_0, \nu, z)$$

avendo indicato con z l'asse verticale, con w_c la velocità media longitudinale, funzione di z , sull'asse della piuma, con Δ la media temporale di $\Delta\rho/\rho$, con b la scala di lunghezza nella direzione trasversale della piuma, definita come la distanza dall'asse in cui si ha un valore di velocità uguale a w_c/e , con B_0 il flusso specifico della spinta di galleggiamento, definito come il prodotto della portata, alla fine della ZFE, per $(\Delta\rho/\rho)g$ e con ν la viscosità

cinematica iniziale del fluido della piuma.

L'applicazione del teorema di Buckingham porta alla seguenti relazioni

$$\frac{w_c Z}{v} = g_1 \left(\frac{B_0^{0.33} Z^{0.66}}{v} \right)$$

$$\frac{b}{z} = g_2 \left(\frac{B_0^{0.33} z^{0.66}}{v} \right)$$

in cui g_1 e g_2 sono delle funzioni da ricavare sperimentalmente.

Tuttavia, è possibile ipotizzare che, ad una certa distanza dalla sorgente della piuma, il campo di moto sia completamente turbolento e indipendente da v . Pertanto la funzione g_1 diviene costante e si potrà scrivere la seguente relazione

$$w_c = K_1 \left(\frac{B_0^{0.33}}{Z^{0.33}} \right). \quad (5.1.1)$$

Di solito la precedente relazione viene scritta come segue

$$\frac{w_c}{w_0} = K_1 \left(\frac{\pi}{4} \right)^{0.33} F_{r0}^{-0.66} \left(\frac{z}{D} \right)$$

essendo F_{r0} il numero indice di Froude densimentrico definito come

$$F_{r0} = \frac{w_0}{\left(\frac{\Delta \rho_0}{\rho_0} g D \right)^{0.5}} = \frac{w_0}{(\Delta_0 g D)^{0.5}}$$

con D il diametro della sorgente della piuma.

Analogamente si ha

$$\frac{b}{z} = K_2.$$

Per quanto riguarda Δ si avrà

$$\Delta = K_3 B_0^{0.66} z^{-1.66} \quad (5.1.3)$$

o, in modo più convenzionale,

$$\frac{\Delta}{\Delta_0} = K_3 \left(\frac{\pi}{4} \right)^{0.66} (F_{r0})^{0.66} \left(\frac{z}{D} \right)^{-1.66}$$

Si osserva che il valore della diluizione sull'asse della piuma ha la seguente espressione

$$S = \frac{\Delta_0}{\Delta}.$$

I valori di K_1 , K_2 e K_3 , secondo Papanicolaou (1984), sono rispettivamente uguali a 3.85, 0.105 e 11.1.

5.2. Analisi dei getti di densità.

Facendo riferimento alla fig. 5.2.1, le proiezioni dell'equazione di Navier-Stokes lungo gli assi x , y , e z sono, rispettivamente,

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(u^2 + \langle u'v' \rangle^2 + \frac{p}{\rho_0} \right) + \frac{\partial}{\partial y} (uv + \langle u'v' \rangle) + \frac{\partial}{\partial z} (uw + \langle u'w' \rangle) = \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} (uv + \langle u'v' \rangle) + \frac{\partial}{\partial y} \left(v^2 + \langle v' \rangle^2 + \frac{p}{\rho_0} \right) + \frac{\partial}{\partial z} (wv + \langle w'v' \rangle) = \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(uw + \langle u'w' \rangle) + \frac{\partial}{\partial y}(vw + \langle v'w' \rangle) + \frac{\partial}{\partial z}\left(w^2 + \langle w'^2 \rangle + \frac{p}{\rho_0}\right) = \left(\frac{\rho_a - \rho}{\rho_0}\right)g + v\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right) \quad (5.2.1)$$

Nelle precedenti equazioni si è evidentemente fatto uso dell'ipotesi di Boussinesq, secondo cui, relativamente ai termini inerziali, $\rho_a \approx \rho_0 \approx \rho$. Nel seguito, per l'ammessa ipotesi di flusso completamente turbolento, si trascureranno i termini relativi alle tensioni viscose.

Il principio di conservazione dei volumi e delle masse porta a concludere che

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

e, nell'ipotesi che ρ_a sia costante, ossia che non ci siano stratificazioni nell'ambito del corpo idrico ricettore, che

$$\frac{\partial}{\partial x}[u(\rho - \rho_a) + \langle u'\rho' \rangle] + \frac{\partial}{\partial y}[v(\rho - \rho_a) + \langle v'\rho' \rangle] + \frac{\partial}{\partial z}[w(\rho - \rho_a) + \langle w'\rho' \rangle] = 0 \quad (5.2.2)$$

essendo ρ' il termine fluttuante di densità e avendo trascurato i termini diffusivi molecolari.

Integrando l'eq. (5.2.1) si ottiene

$$\int_{A(z)} \frac{\partial}{\partial x}(uw + \langle u'w' \rangle) dx dy + \int_{A(z)} \frac{\partial}{\partial y}(vw + \langle v'w' \rangle) dx dy + \int_{A(z)} \frac{\partial}{\partial z}\left(w^2 + \langle w'^2 \rangle + \frac{p}{\rho_0}\right) dx dy. \quad (5.2.3)$$

Ai fini della definizione dell'area $A(z)$ di integrazione, si può osservare che come perimetro di delimitazione di ogni sezione trasversale del getto di densità può intendersi sia la curva luogo geometrico dei punti a tensioni tangenziali nulle, sia la curva luogo geometrico dei punti a velocità verticale nulla. Questi due perimetri potrebbero non necessariamente coincidere (Fischer et al., 1979). Tuttavia, ai fini dell'analisi che si intende sviluppare nel

seguito, si supporrà che le due curve siano sovrapposte. Pertanto la (5.2.3) diviene

$$\int_{A(z)} \frac{\partial}{\partial Z} \left(w^2 + \langle w'^2 \rangle + \frac{p}{\rho_0} \right) dx dy = \int_{A(z)} \left(\frac{\rho_a - \rho}{\rho_0} \right) g dx dy. \quad (5.2.4)$$

Analogamente, dalla (5.2.2) si ottiene

$$\int_{A(z)} \frac{\partial}{\partial Z} \left[w(\rho - \rho_a) + \langle w'p' \rangle \right] dx dy = 0. \quad (5.2.5)$$

Le due precedenti equazioni sono basilari per l'analisi dei getti di densità immessi verticalmente in un campo di fluido in quiete.

Miller e Comings (1957) e Bradbury (1965) dimostrarono che, nei getti bidimensionali, i contributi di $\langle w'^2 \rangle$ e p/ρ_0 sono piccoli e di segno opposto. Pertanto, anche se questa ipotesi non è necessariamente verificata nella genericità delle configurazioni, viene applicata alla (5.2.4), dando luogo a

$$\int_{A(z)} \frac{\partial}{\partial Z} w^2 dx dy = \int_{A(z)} \left(\frac{\rho_a - \rho}{\rho_0} \right) g dx dy.$$

Analogamente, nella (5.2.5) è possibile trascurare il termine $\langle w'p' \rangle$, sebbene Kotsovinos (1975) abbia dimostrato che questa ipotesi non sia sempre accettabile nei campi di moto in cui intervengono forze di galleggiamento. Ciononostante, come proposto da Fischer et al. (1979), ai fini della definizione di equazioni che descrivano in modo approssimato il comportamento di un getto di densità, si potrà scrivere la seguente relazione

$$\int_{A(z)} \frac{\partial}{\partial Z} [w(\rho_a - \rho)] dx dy = 0.$$

5.3. Numero di Froude densimetrico per le piume e i getti di densità.

Le eqq. (5.1.1), (5.1.2) e (5.1.3) consentono di dimostrare, dopo alcuni passaggi algebrici, che il numero di Froude densimetrico delle piume, definito come segue

$$Fr = \frac{w}{\sqrt{g \cdot \Delta \cdot b}}$$

è una costante.

In effetti si ricava che

$$Fr = \frac{K_1 B_0^{0.33} Z^{-0.33}}{\sqrt{g K_3 B_0^{0.66} Z^{-1.66} K_2 Z}} = \frac{K_1}{\sqrt{g \cdot K_2 \cdot K_3}} \approx 1.14.$$

Utilizzando l'approccio proposto da Pedersen (1986), è analogamente possibile dimostrare l'asserto. Infatti, tenendo conto che in letteratura l'allargamento del getto, definito, in ogni sezione trasversale, come la distanza dall'asse in cui la velocità longitudinale si annulla, si assume proporzionale a b , l'equazione che esprime la variabilità della quantità di moto di una piuma può essere scritta come segue

$$\frac{\partial}{\partial z} (\rho \alpha' V^2 \pi b^2) = \Delta \cdot \rho g \pi b^2$$

in cui con V si è indicata la velocità media longitudinale nella singola sezione trasversale della piuma e con α' il coefficiente di ragguaglio delle quantità di moto, il cui valore, per le piume piane, è circa 1.83 (Pedersen, 1986). Dalla precedente relazione si ricava

$$\rho \alpha' V^2 \pi 2b \frac{\partial b}{\partial z} + \rho \alpha' \pi b^2 2V \frac{\partial V}{\partial z} = \Delta \cdot \rho g \pi b^2$$

ossia

$$\rho \alpha' \frac{\partial b}{\partial z} + \rho \alpha' b \frac{1}{V} \frac{\partial V}{\partial z} = \frac{\Delta \cdot g b}{2 V^2} \rho = \frac{1}{4 Fr^2} \rho. \quad (5.3.1)$$

Il primo termine del primo membro della precedente relazione è costante, per l'ammessa variabilità lineare di b con z . Anche il secondo termine del primo membro è

costante, come è facilmente dimostrabile ammettendo una legge di potenza per V , essendo questa proporzionale a w_c , come proposto in letteratura. Poiché, allora, il primo membro della (5.3.1) è costante, deve necessariamente essere costante anche il secondo, che rappresenta il quadrato del numero di Froude densimetrico di una piuma. Da questa considerazione, ponendo in prima approssimazione α' uguale a 1, si ricava

$$Fr^2 = \frac{1}{4\left(\alpha' \frac{\partial b}{\partial z} + \alpha' b \frac{1}{V} \frac{\partial V}{\partial z}\right)} = \frac{1}{4(0.11 - 0.11 \cdot 0.333)} = 3.40,$$

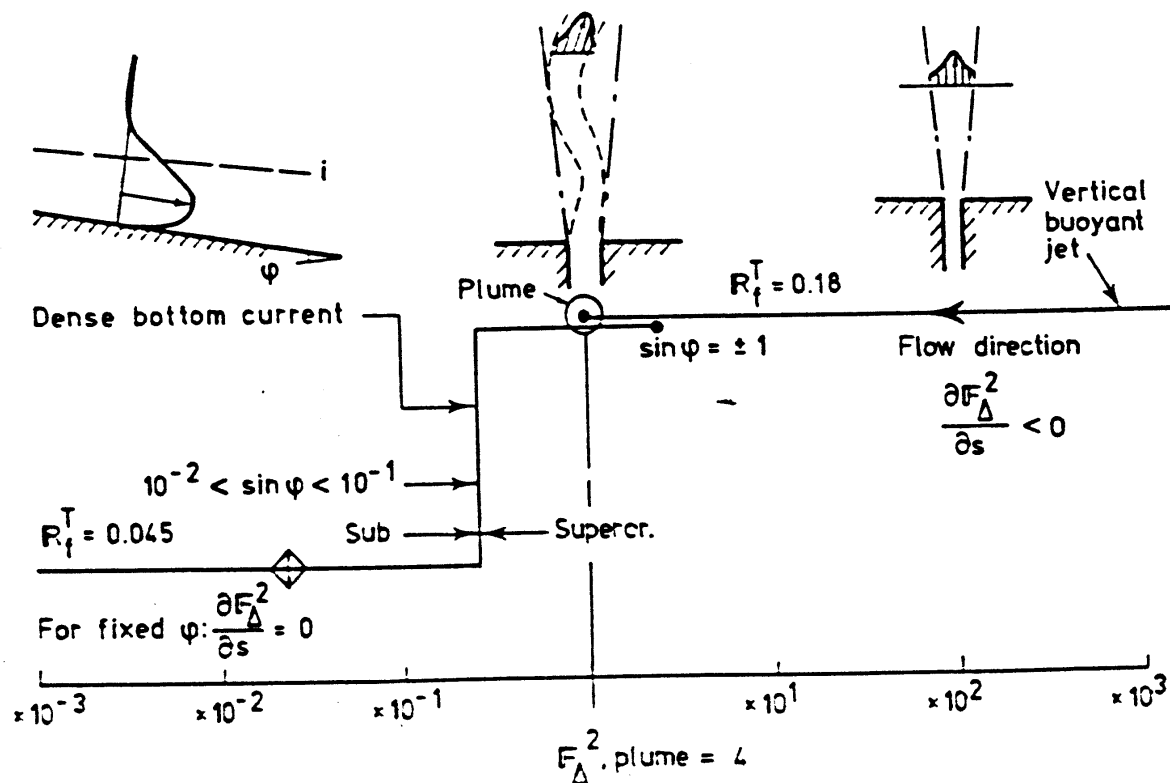


Fig. 5.3.1. Esempi di flussi stratificati al variare del numero di Froude densimetrico al quadrato.

ossia $Fr \approx 1.8$, poco diverso da 1.14 ottenuto precedentemente.

Pertanto, si può affermare che il numero di Froude densimetrico di una piuma è una costante. Da un punto di vista fisico, questo significa che, per le piume, il rapporto tra le forze di inerzia e le forze di galleggiamento è costante.

Una piuma può essere immaginata come un caso limite di una corrente di densità al fondo di un canale, ossia come una corrente di densità in un canale con pendenza

infinitamente elevata (si faccia riferimento alla fig. 5.3.1 tratta da Pedersen, 1986). Si giustificerebbe, allora, la seguente relazione

$$0 < F_{r,cdf} < F_{r,p} = \text{costante} < F_{r,gd} < F_{r,gp} = \infty$$

in cui si è indicato con $F_{r,cdf}$ il numero di Froude densimetrico per le correnti di densità al fondo di un canale, con $F_{r,p}$ il numero di Froude densimetrico per le piume (costante, come precedentemente dimostrato), con $F_{r,gd}$ il numero di Froude densimetrico dei getti di densità e, infine, con $F_{r,gp}$ il numero di Froude densimetrico dei getti puri, che è infinitamente elevato, essendo nulla, in tal caso, la variazione di densità tra fluido del getto e fluido ambiente.

5.4. Risultati sperimentali relativi ai getti di densità a confronto con le relazioni teoriche.

Al fine di un confronto delle relazioni teoriche con le risultanze sperimentali per i getti di densità, si può far riferimento alle esperienze di Papanicolaou e List (1988). Questi autori studiarono i getti di densità immessi verticalmente in un campo di liquido in quiete.

I risultati sperimentali di Papanicolaou e List (1988) portano a concludere che, per i getti di densità, è possibile distinguere due regioni a diverso comportamento. A tal riguardo, è fondamentale definire la scala di lunghezza l_M come segue

$$l_M = \frac{M_0^{3/4}}{B_0^{1/2}}.$$

Questa scala rappresenta la distanza dall'ugello oltre la quale gli effetti di densità prevalgono su quelli della quantità di moto.

I risultati sperimentali di Papanicolaou e List (1988) relativi ai valori della velocità media verticale in asse portano alle seguenti relazioni

$$\begin{cases} \frac{M_0^{1/2}}{ZW_c} = 0.132 & \text{per } \frac{z}{l_m} < 1 \\ \frac{M_0^{1/2}}{ZW_c} = 0.260 \left(\frac{z}{l_m} \right)^{-2/3} & \text{per } \frac{z}{l_m} > 5 \end{cases}$$

come si evince dalla fig. 5.4.1.

E' evidente, allora, che il campo di moto di un getto di densità è analogo a quello di un getto puro per $z/l_M < 1$ e a quello di una piuma per $z/l_M > 5$. Per valori $1 < z/l_M < 5$, i risultati sperimentali mettono in evidenza l'esistenza di una regione di transizione.

Per quanto attiene la scala delle lunghezze b , precedentemente definita, dalla fig. 5.4.2 si evince come non ci sia una sostanziale differenza tra il comportamento di un getto puro e quello di una piuma.

Ciononostante, Papanicolaou e List (1988) propongono due distinte relazioni

$$\begin{cases} \frac{b}{l_M} = 0.108 \left(\frac{z}{l_M} \right)^{0.995} & \text{per } \frac{z}{l_M} < 1 \\ \frac{b}{l_M} = 0.105 \frac{z}{l_M} & \text{per } \frac{z}{l_M} > 5 \end{cases} \quad (5.4.1)$$

Per quanto riguarda la diluizione, essi proposero le seguenti relazioni sperimentali

$$\begin{cases} \frac{SQ_0}{zM_0^{1/2}} = 0.147 & \text{per } \frac{z}{l_M} < 1 \\ \frac{SQ_0}{zM_0^{1/2}} = 0.070 \left(\frac{z}{l_M} \right)^{2/3} & \text{per } \frac{z}{l_M} > 5 \end{cases}$$

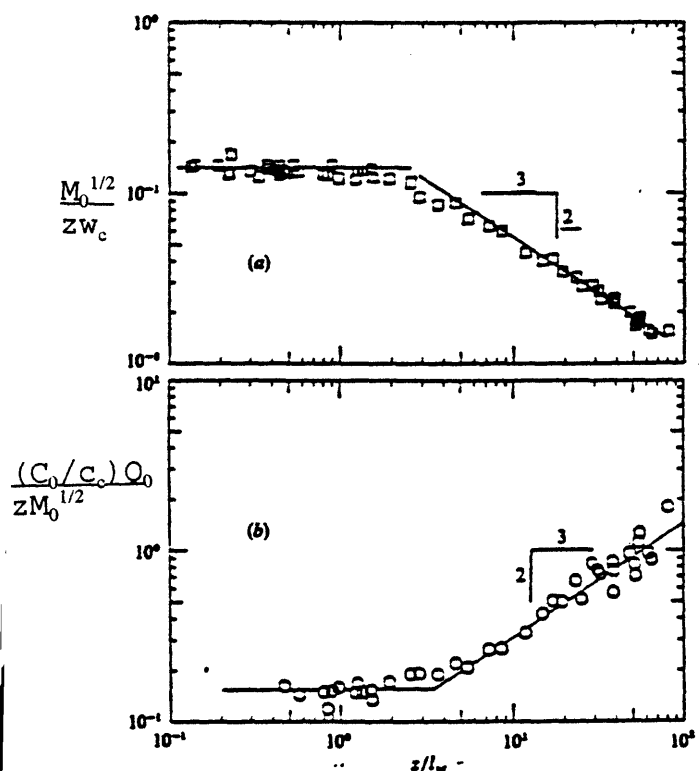


Fig. 5.4.1. Andamenti delle velocità verticali e delle concentrazioni in asse, secondo Papanicolaou e List (1988).

che sono riportate in fig. 5.4.1 (si è posto $S(z)=C_0/c_c$, essendo C_0 la concentrazione all'efflusso e c_c la concentrazione media in asse al variare di z). Definendo la scala delle lunghezze b_c come la distanza, in direzione trasversale all'asse del getto di densità, in corrispondenza della quale la concentrazione è $1/e$ volte quella in asse, i risultati sperimentali di Papanicolaou e List (1988) portano a concludere che valgono le seguenti relazioni

$$\begin{cases} \frac{b_c}{l_M} = 0.129 \left(\frac{z}{l_M} \right)^{0.994} & \text{per } \frac{z}{l_M} < 1 \\ \frac{b_c}{l_M} = 0.112 \frac{z}{l_M} & \text{per } \frac{z}{l_M} > 5 \end{cases} \quad (5.4.2)$$

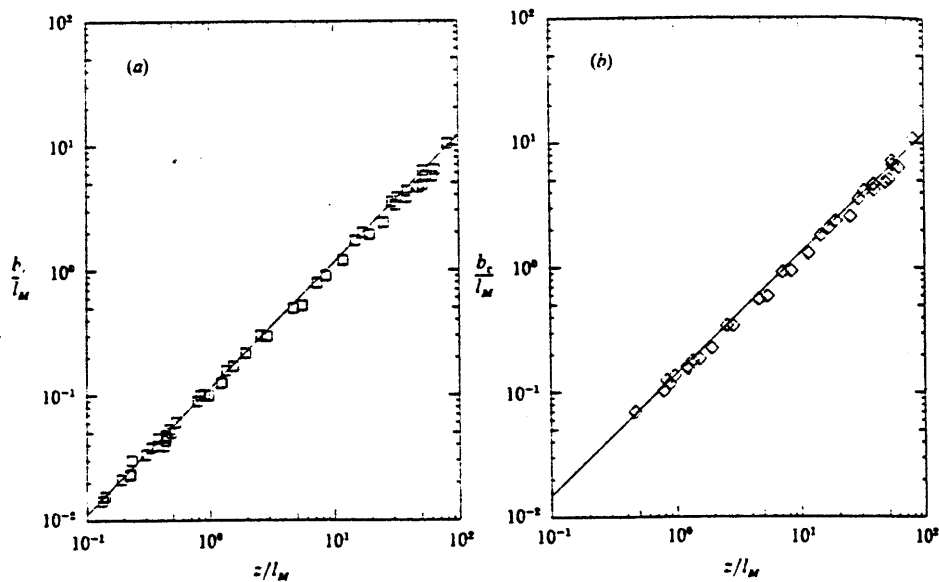


Fig. 5.4.2. Andamento delle scale di lunghezza b e b_c .

Le precedenti equazioni mettono in evidenza che la scala b_c è più grande della scala b , data dalle (5.4.1), in accordo con Rouse et al. (1952), ma in contrasto con i risultati di George et al. (1977) e Nakagome e Hirata (1976), per i quali $b > b_c$. Tuttavia, Papanicolaou e List (1988) mettono in evidenza che tutti gli autori precedentemente richiamati effettuarono le misurazioni sperimentali in un campo vicino, ossia a distanze inferiori a 20 volte il diametro, per i getti puri, e a 80 volte il diametro, per le piume. I risultati sperimentali di Papanicolaou e List (1988), invece, si estendono fino a 120 volte il

di diametro. Utilizzando le (5.4.1) e (5.4.2) per $z/l_M > 5$ si ottiene

$$\lambda = \frac{b_c}{b} = 1.194,$$

che è un valore molto prossimo a 1.20 comunemente accettato nella progettazione degli scarichi di effluenti assimilabili a getti di densità (Muellenhof et al., 1985). Tale relazione consente di ricavare la scala b_c se è nota la scala b di più facile determinazione.

Per quanto attiene le quantità di moto, i risultati sperimentali di Papanicolaou e List (1988) sono riportati in fig. 5.4.3, da cui si evince, ancora una volta, che per $z/l_M < 1$ il comportamento del getto di densità è simile a quello di un getto puro, mentre per $z/l_M > 5$ il comportamento si avvicina a quello di una piuma.

Analiticamente, secondo Papanicolaou e List (1988) si ha

$$\begin{cases} \frac{M(z)}{M_0} = 0.96 & \text{per } \frac{z}{l_M} < 1 \\ \frac{M(z)}{M_0} = 0.290 \left(\frac{z}{l_M} \right)^{4/3} & \text{per } \frac{z}{l_M} > 5 \end{cases}$$

Dalle relazioni analitiche si osserva che, per $z/l_M < 1$, ossia per la regione in cui il getto di densità si comporta come un getto puro, il rapporto tra la quantità di moto della generica sezione trasversale a quota z e la quantità di moto iniziale non è esattamente uguale ad uno; inoltre dalla fig. 5.4.3 si nota una certa diffusione dei dati. A tal riguardo, bisogna mettere in evidenza che l'ipotesi secondo cui la quantità di moto di un getto puro sia costante è valida nel caso di assenza di una componente di velocità del fluido ambiente nella direzione dell'asse del getto. L'esistenza di un moto del fluido ambiente in direzione assiale andrebbe ad influenzare il valore teorico della quantità di moto di un getto. In effetti, per i getti studiati in laboratorio, in cui si fa uso di vasche di dimensione finita, è facile che si formino delle correnti non desiderate (Taylor, 1958). In particolare, è da attendersi la presenza di una corrente di ritorno in prossimità delle pareti e, in generale, delle zone esterne al getto. Pertanto, se le misure non vengono condotte in tutte le zone interessate dalle correnti di ritorno, il valore sperimentale della quantità di moto potrà differire da quello teorico.

Per valori di $z/l_M > 5$ le relazioni presentate nel paragrafo 5.1 a riguardo della variazione della velocità in asse e della scala di lunghezza b in funzione di z , nell'ipotesi di poter definire un valore costante del rapporto tra la velocità media in ogni sezione e la velocità massima (0.53 nel caso di una piuma, secondo Pedersen, 1986), portano a concludere che la quantità di moto debba variare secondo la seguente relazione

$$M(z) \propto V^2 b^2 \propto z^{-0.33 \cdot 2} \cdot z^2 = z^{4/3}.$$

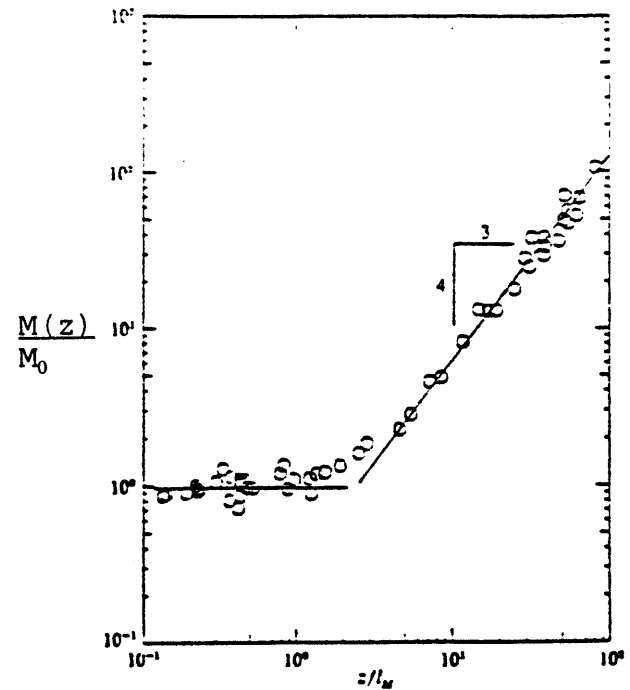


Fig. 5.4.3. Andamento della quantità di moto.

In effetti i risultati di Papanicolaou e List (1988) confermano questo andamento come si vede dalla fig. 5.4.3.

Analogamente, per quanto attiene le portate, teoricamente si ottiene

$$Q(z) \propto V \cdot b^2 \propto z^{-0.33} \cdot z^2 = z^{5/3}$$

In effetti la fig. 5.4.4 mette in evidenza che per $z/l_M > 5$ vale la seguente relazione

$$\frac{Q(z)B_0^{0.5}}{M_0^{5/4}} = 0.140 \left(\frac{z}{l_M} \right)^{5/3}.$$

Sempre dalla stessa figura si evince che la portata è funzione lineare della z , per $z/l_M < 1$, ossia nella regione in cui il getto di densità è, di fatto, assimilabile ad un getto puro.

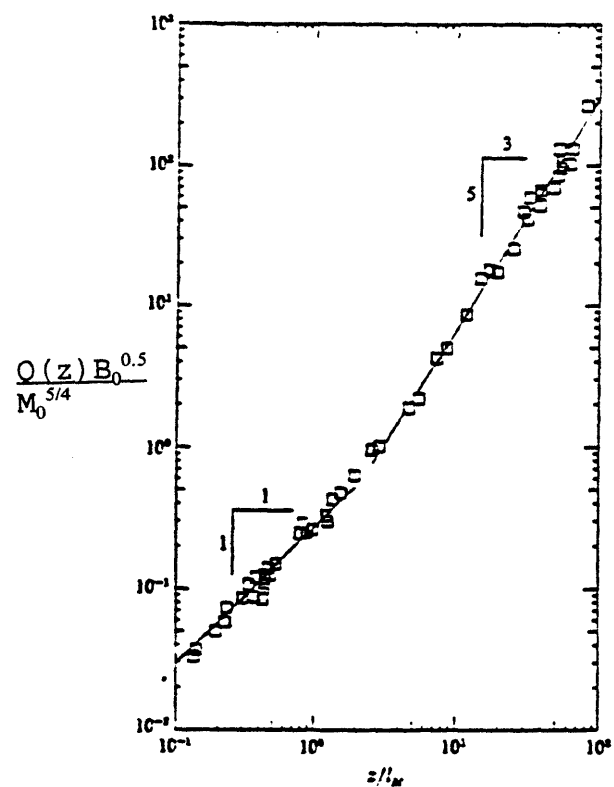


Fig. 5.4.4. Andamento delle portate.