

7. SULL'ENERGIA CINETICA DI UN FLUSSO TURBOLENTO.

Nel seguito si analizzerà l'equazione che governa la dinamica dell'energia di un flusso medio e della turbolenza, come proposto da Tennekes e Lumley (1972). Allo scopo di avere una forma compatta delle equazioni si farà uso della notazione tensoriale cartesiana e saranno indicate col sovrassegno $\sim$ le quantità istantanee, in maiuscolo le grandezze medie e in minuscolo le componenti fluttuanti (es.: $\tilde{u}_i = U_i + u_i$); inoltre, non essendoci possibilità di equivoco, le medie temporali verranno indicate con i simboli $\langle \rangle$.

7.1. Energia cinetica di un campo di moto medio.

Le equazioni del moto medio stazionario di un fluido incomprimibile sono

$$U_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{T_{ij}}{\rho} \right) \quad (7.1.1)$$

$$\frac{\partial U_i}{\partial x_i} = 0$$

avendo indicato con T_{ij} il tensore di tensione:

$$T_{ij} = -P \delta_{ij} + 2\mu S_{ij} - \rho \langle u_i u_j \rangle \quad (7.1.2)$$

con ovvio significato dei simboli ed essendo δ_{ij} il simbolo di Kronecker ($\delta_{ij}=0$ se $i \neq j$ e $\delta_{ij}=1$ se $i=j$) e con S_{ij} il cosiddetto *strain rate*

$$S_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right).$$

Per ottenere l'equazione dell'energia cinetica del flusso medio $(U_i U_i)/2$, si moltiplichino la (7.1.1) per U_i

$$U_i U_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{T_{ij}}{\rho} \right) U_i$$

ossia

$$\rho U_i U_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} = U_i \frac{\partial}{\partial x_j} (T_{ij}) \quad (7.1.3)$$

ma

$$\rho U_i \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{1}{2} U_i^2 \right) = \rho U_j U_i \frac{\partial U_i}{\partial x_j}$$

e

$$\frac{\partial}{\partial x_j} (T_{ij} U_i) - T_{ij} \frac{\partial U_i}{\partial x_j} = \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} U_i + T_{ij} \frac{\partial U_i}{\partial x_j} - T_{ij} \frac{\partial U_i}{\partial x_j}.$$

Pertanto la (7.1.3) diviene

$$\rho U_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{1}{2} U_i U_i \right) = \frac{\partial}{\partial x_j} (T_{ij} U_i) - T_{ij} \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \quad (7.1.4)$$

Poichè T_{ij} è un tensore simmetrico, si dimostra che il prodotto $T_{ij} \partial U_i / \partial x_j$ è uguale al prodotto di T_{ij} per S_{ij} . Cioè, vale la seguente relazione

$$\rho U_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{1}{2} U_i U_i \right) = \frac{\partial}{\partial x_j} (T_{ij} U_i) - T_{ij} S_{ij}. \quad (7.1.5)$$

Il primo termine del secondo membro della (7.1.5) rappresenta il trasporto di energia del flusso medio legata al tensore T_{ij} . Questo termine è nullo se integrato su un volume la cui superficie è caratterizzata da valori nulli di T_{ij} o U_i . Infatti per il teorema della divergenza

$$\int_V \frac{\partial}{\partial x_j} (T_{ij} U_i) dV = \int_S n_j T_{ij} U_i dS,$$

essendo n_j le componenti di un versore normale alla superficie infinitesima dS . Se il lavoro eseguito dalle tensioni sulla superficie S del volume di controllo V è nullo, solo l'integrale di volume $T_{ij}S_{ij}$ può modificare l'energia cinetica. Il termine $T_{ij}S_{ij}$ è chiamato *lavoro di deformazione*.

Per fissare le idee si supponga di avere un flusso piano (tutte le variabili dipendono solo da x_2) con un'unica componente non nulla di velocità, U_1 . Il primo termine della (7.1.4) è pertanto nullo. La (7.1.4) diviene

$$0 = \frac{\partial}{\partial x_2}(T_{12}U_1) - T_{12} \frac{\partial U_1}{\partial x_2} \quad (7.1.6)$$

Il primo termine del secondo membro della (7.1.6) rappresenta il lavoro delle tensioni per unità di volume. Poichè il primo membro è nullo, si conclude che il lavoro $\partial(T_{12}U_1)/\partial x_2$ compiuto dalle tensioni non dà luogo ad una variazione di energia cinetica di questo flusso. L'equazione (7.1.6) mette in evidenza che, per il campo di moto analizzato, il lavoro $\partial(T_{12}U_1)/\partial x_2$ viene bilanciato dal lavoro di deformazione $T_{12}\partial(U_1)/\partial x_2$. Ciò comporta che la variazione di $(U_i U_i)/2$ è nulla, ossia l'energia $(U_i U_i)/2$ non cambia. Il lavoro di deformazione è causato dalle tensioni T_{ij} :

$$T_{ij}S_{ij} = 2\mu S_{ij}S_{ij} - p <u_i u_j> S_{ij}.$$

Il contributo della pressione sul lavoro di deformazione in un fluido incomprimibile è nullo. Infatti

$$-P \delta_{ij} S_{ij} = -P S_{ii} = -P \frac{\partial U_i}{\partial x_i} = 0$$

Il contributo dei termini viscosi al lavoro di deformazione è sempre negativo. Di conseguenza esso rappresenta una perdita di energia cinetica per il campo di moto medio. Per questa ragione il termine $2\mu S_{ij}S_{ij}$ è chiamato *dissipazione viscosa*. Il contributo delle tensioni di Reynolds al lavoro di deformazione è anch'esso dissipativo nella maggior parte dei flussi (infatti quasi sempre $<u_i u_j>$ è discorde da S_{ij}). Poichè le tensioni turbolente

compiono lavoro di deformazione, l'energia cinetica della turbolenza (cioè legata alle componenti turbolente di velocità) beneficiano di questo lavoro. Per questa ragione il termine $-\rho \langle u_i u_j \rangle S_{ij}$ è chiamato *produzione di energia turbolenta*.

7.2. Gli effetti della viscosità.

Si riscriva la (7.1.5) nel seguente modo

$$U_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{1}{2} U_i U_i \right) = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_j} (T_{ij} U_i) - \frac{1}{\rho} T_{ij} S_{ij}. \quad (7.2.1)$$

Per la (7.1.2) si ottiene

$$U_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{1}{2} U_i U_i \right) = \left[\frac{\partial}{\partial x_j} \left(-\frac{P}{\rho} U_j + 2\nu U_i S_{ij} - \langle u_i u_j \rangle U_i \right) \right] - 2\nu S_{ij} S_{ij} + \langle u_i u_j \rangle S_{ij} \quad (7.2.2)$$

Si faccia riferimento ai primi tre termini della (7.2.2) posti in parentesi quadre. Il primo termine rappresenta il lavoro delle pressioni; il secondo è il trasporto di energia del flusso medio legato alle tensioni viscosi; il terzo è il trasporto di energia del flusso medio legato alle tensioni di Reynolds.

Se il termine $U_i T_{ij}$ è nullo sulla superficie del volume di calcolo, questi tre termini potranno solo ridistribuire energia all'interno del volume. Nella maggior parte dei flussi, i due termini viscosi della (7.2.2) sono trascurabili. Questa conclusione è intuitiva se si pensa che nei flussi turbolenti il numero di Reynolds è relativamente grande e, dunque, la viscosità ha scarsa influenza diretta.

7.3. Energia cinetica della turbolenza.

L'equazione che governa l'energia cinetica della turbolenza $\langle u_i u_i \rangle / 2$ si ottiene partendo dall'equazione del moto

$$\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial t} + \tilde{u}_j \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_j} \tilde{\sigma}_{ij} \quad (7.3.1)$$

avendo indicato con

$$\tilde{\sigma}_{ij} = -\tilde{p} \delta_{ij} + 2\mu \tilde{s}_{ij}$$

e con

$$\tilde{s}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x_i} \right).$$

Moltiplicando primo e secondo membro della (7.3.1) per $\tilde{u}_i$ si ottiene

$$\tilde{u}_i \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial t} + \tilde{u}_i \tilde{u}_j \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} = \frac{\tilde{u}_i}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_j} \tilde{\sigma}_{ij}.$$

Il primo termine del primo membro è nullo per l'ipotesi di moto permanente e dunque si ottiene

$$\tilde{u}_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{1}{2} \tilde{u}_i \tilde{u}_i \right) = \frac{\tilde{u}_i}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_j} (-\tilde{p} \delta_{ij} + 2\mu \tilde{s}_{ij}).$$

Andando a mediare la precedente equazione per un tempo sufficientemente grande e sottraendo al risultato così ottenuto la (7.2.2), che governa l'energia cinetica del flusso medio, si ottiene *l'equazione dell'energia turbolenta*

$$U_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{1}{2} \langle u_i u_j \rangle \right) = - \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{1}{\rho} \langle u_j p \rangle + \frac{1}{2} \langle u_i u_i u_j \rangle - 2\nu \langle u_i s_{ij} \rangle \right) - \langle u_i u_j \rangle S_{ij} - 2\nu \langle s_{ij} s_{ij} \rangle, \quad (7.3.2)$$

avendo indicato con s_{ij}

$$s_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right).$$

Il primo membro della (7.3.2) rappresenta la variazione di energia turbolenta. Essa è dovuta al lavoro di un gradiente di pressione, alle componenti turbolente della velocità, alle

tensioni viscosi e, infine, a due tipi di lavori di deformazione. Se il flusso di energia relativo alla superficie che racchiude un volume di controllo è nullo, il primo termine del secondo membro è nullo e rappresenta esclusivamente una redistribuzione dell'energia da un punto all'altro del flusso. I termini del lavoro di deformazione sono particolarmente importanti. Si osservi che il secondo termine del secondo membro della (7.3.2) è presente nella (7.2.2) con segno opposto. Questo termine è legato allo scambio di energia cinetica tra flusso medio e turbolenza. Normalmente lo scambio di energia rappresenta una perdita di energia per il flusso medio a vantaggio della turbolenza.

L'ultimo termine della (7.3.2) è chiamato *dissipazione viscosa*. A differenza del termine viscoso presente nella (7.2.2), ora, esso è essenziale per la dinamica della turbolenza e normalmente non può essere trascurato.

7.4. Produzione e dissipazione di energia cinetica turbolenta.

Si faccia riferimento ad un flusso stazionario omogeneo in cui tutte le grandezze medie, ad eccezione di U_j , siano indipendenti dalla posizione e in cui S_{ij} è costante. In tali ipotesi, la (7.3.2) diviene

$$-\langle u_i u_j \rangle S_{ij} = 2\nu \langle S_{ij} S_{ij} \rangle$$

Quest'ultima equazione mette in evidenza che in questo flusso la produzione di energia turbolenta legata alle tensioni di Reynolds uguaglia la dissipazione viscosa. Va fatto notare che nella maggior parte dei flussi la produzione e la dissipazione non si bilanciano, sebbene siano dello stesso ordine di grandezza.

Si facciano le seguenti posizioni

$$P = -\langle u_i u_j \rangle S_{ij}; \quad \varepsilon = 2\nu \langle S_{ij} S_{ij} \rangle$$

Per quanto detto in precedenza si ha

$$P = \varepsilon.$$

La precedente equazione consente di dare una interpretazione sul comportamento dei vortici

della turbolenza, distinguendo gli stessi in micro e macrovortici. In termini di scale, si può ritenere che $-\langle u_i u_j \rangle = u^2$, mentre $\partial U_i / \partial x_j \sim U/L \sim u/l$, ossia $S_{ij} \sim u/l$, avendo indicato con u ed l , rispettivamente, delle opportune scale di velocità e di lunghezza della turbolenza (Tennekes e Lumley, 1972). Pertanto si potrà scrivere $\langle u_i u_j \rangle S_{ij} = C_1 u l S_{ij} S_{ij}$, e $\langle u_i u_j \rangle S_{ij} = \langle u_i u_j \rangle S_{ij} S_{ij} / S_{ij} = C_1 u^2 l S_{ij} S_{ij} / u$. Ossia, si ha che $C_1 u l S_{ij} S_{ij} = 2\nu \langle s_{ij} s_{ij} \rangle$. Poichè il numero di Reynolds ul/ν è generalmente molto grande, vale la seguente relazione

$$C_1 \frac{ul}{\nu} S_{ij} S_{ij} = 2 \langle s_{ij} s_{ij} \rangle \rightarrow \langle s_{ij} s_{ij} \rangle \ll S_{ij} S_{ij}.$$

Pertanto lo *strain rate* s_{ij} è molto più grande dello *strain rate* S_{ij} , nell'ipotesi che il numero di Reynolds sia grande. Poichè S_{ij} e s_{ij} hanno le dimensioni dell'inverso del tempo, si ha che gli *eddies* che contribuiscono soprattutto alla dissipazione di energia sono caratterizzati da scale temporali molto piccole se confrontate con le scale temporali del flusso medio. Questo suggerisce che l'interazione tra S_{ij} e s_{ij} sia molto piccola. In altre parole S_{ij} e s_{ij} non interagiscono fortemente poichè non sono *sintonizzati* sulla stessa frequenza.

Si faccia, ora, riferimento al caso dei getti. Relativamente ad una sezione trasversale Ω dello stesso è possibile definire la seguente grandezza globale di produzione di energia cinetica turbolenta

$$\text{PROD} = \int_{\Omega} \rho P d\Omega$$

e la seguente grandezza globale di dissipazione

$$\text{DISS} = \int_{\Omega} \left\langle u_i \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} \right\rangle d\Omega.$$

Come proposto da Pedersen (1986) e facendo riferimento alla fig. 7.4.1, si ha che $PROD > DISS$. In realtà, secondo Pedersen (1986), tale relazione è valida, in generale, per i flussi caratterizzati da fenomeni di mescolamento (fig. 7.4.1).

La ragione di questo comportamento è fisicamente interpretabile come segue. Nei flussi caratterizzati da processi di mescolamento (per esempio, i getti) la produzione di energia turbolenta (PROD) viene *utilizzata* per la dissipazione (DISS) in calore e per l'aumento dell'energia potenziale (POT) e cinetica (KIN) della massa di fluido esterno soggetta a intrusione e caratterizzata dalla velocità di intrusione.

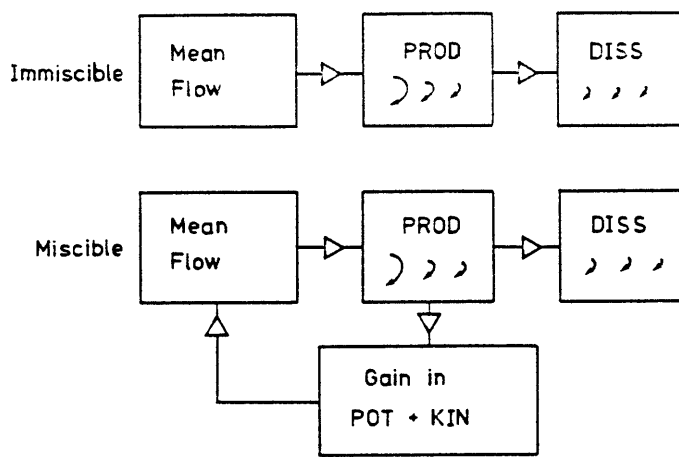


Fig. 7.4.1. Trasporto di energia; confronto tra flussi senza e con processi di mescolamento.

In fig. 7.4.1 si riporta un diagramma a blocchi che rappresenta, in modo schematico, il bilancio energetico per i fluidi caratterizzati o meno da processi di mescolamento (Pedersen, 1986). Si osserva, dunque, che nei getti una quota parte della produzione di energia turbolenta è *convertita* in un guadagno per il campo di moto medio, attraverso l'energia potenziale e cinetica del fluido di intrusione che diviene, appunto, parte integrante del flusso medio.