

11. MODELLO MATEMATICO DI D.A. CHIN PER LO STUDIO DELL'INTERAZIONE DI UN GETTO CON UN CAMPO DI MOTO ONDOSI.

D.A. Chin (1987) mise in evidenza l'importanza che può assumere la presenza di un campo di moto ondoso sui processi di diluizione degli scarichi di inquinanti. L'autore suggerisce di tener conto, per una ottimale progettazione dei diffusori, del positivo effetto delle onde. Questo potrebbe consentire di realizzare lo scarico in acque più basse rispetto a quanto indicato dalle procedure progettuali convenzionali, sempre che non intervengano delle motivazioni di altra natura, legate alla tutela del litorale a sconsigliare una tale soluzione. Tutto ciò potrebbe tradursi in un significativo risparmio nei costi di realizzazione delle opere.

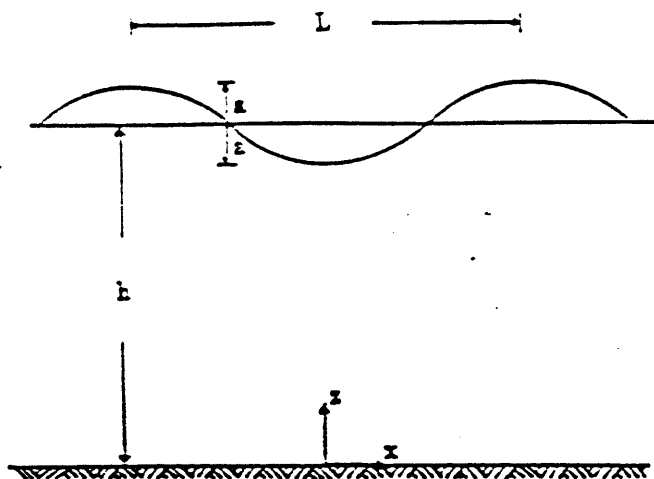


Fig. 11.1.1. Sistema di riferimento assoluto.

Nel seguito si presenterà un modello matematico proposto da Chin (1988) per simulare l'effetto delle onde sul processo di mescolamento di un getto di densità.

11.1. Formulazione del modello.

Nel modello proposto da Chin (1988), il moto del fluido ambiente è descritto attraverso la teoria delle onde di piccola ampiezza (teoria di Airy):

$$u = \frac{agk}{\sigma} \frac{\cosh(kz)}{\cosh(kh)} \sin(kx - \sigma t) \quad (11.1.1)$$

$$w = -\frac{agk}{\sigma} \frac{\sinh(kz)}{\cosh(kh)} \cos(kx - \sigma t) \quad (11.1.2)$$

in cui u e w sono, rispettivamente, le componenti orizzontali e verticali di velocità del campo ondoso, a è l'ampiezza dell'onda, g l'accelerazione di gravità, $k=2\pi/L$ il numero d'onda, L la lunghezza d'onda, $\sigma=2\pi/T$ la pulsazione dell'onda, T il periodo dell'onda, h la profondità dell'acqua, x e z sono rispettivamente le coordinate orizzontale e verticale del sistema di riferimento assoluto prescelto e t , infine, è il tempo. Si veda la fig. 11.1.1.

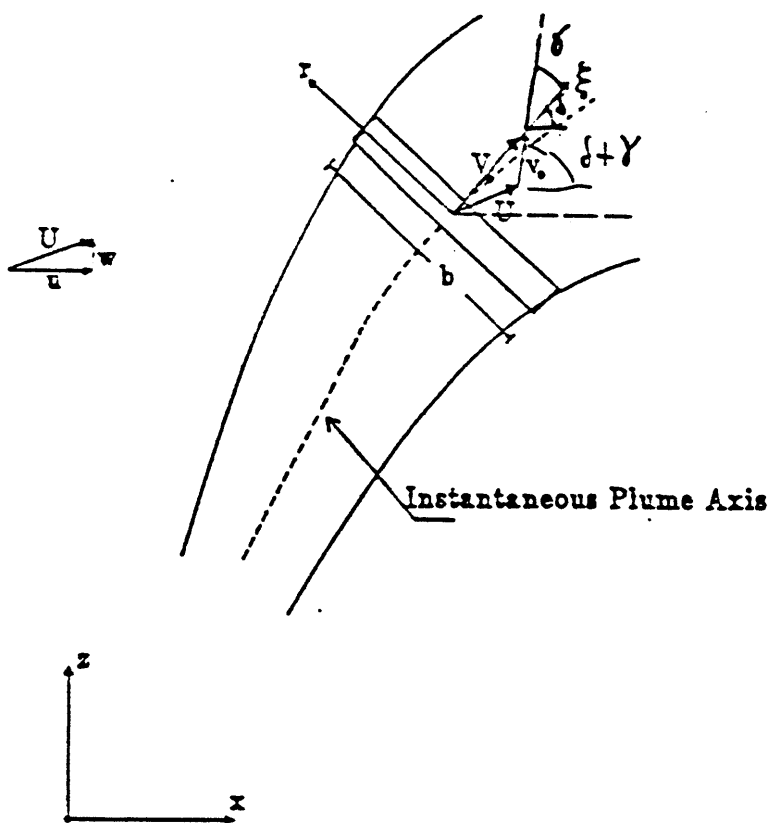


Fig. 11.1.2. Elemento cilindrico del getto e alcune variabili del modello di Chin (1988).

Si consideri il moto di un elemento cilindrico del getto del tipo mostrato in fig. 11.1.2. La velocità del fluido ambiente, somma vettoriale di u e w , è U ; V_0 è la velocità assoluta in corrispondenza dell'asse dell'elemento del getto, definita come la somma vettoriale di U e v_0 , essendo quest'ultima la velocità relativa in corrispondenza dell'asse dell'elemento cilindrico del getto; δ è l'angolo che la velocità assoluta V_0 forma con la direzione orizzontale e γ è l'angolo che la velocità relativa v_0 forma con l'asse del getto. Si può assumere, generalmente, che il profilo della velocità relativa v , in ogni sezione trasversale del getto, abbia un andamento gaussiano

$$\bar{v} = \bar{v}_0 e^{-\frac{r^2}{b^2}} \quad (11.1.3)$$

Nel caso di presenza di moto ondoso, il processo di mescolamento è influenzato dal moto relativo esistente tra il fluido ambiente e quello del getto di densità; la fig. 11.1.3 visualizza il moto relativo del getto rispetto al campo di moto del fluido ambiente. Dalla figura è evidente, secondo quanto proposto da Chin (1988), che la velocità relativa v ha due componenti che inducono due differenti meccanismi di intrusione: la componente lungo ξ induce una intrusione radiale, mentre quella lungo r provoca una *intrusione forzata*. In effetti, come messo in evidenza dallo stesso Chin (1988), una stima quantitativa dello scambio di masse che si realizza tra un getto

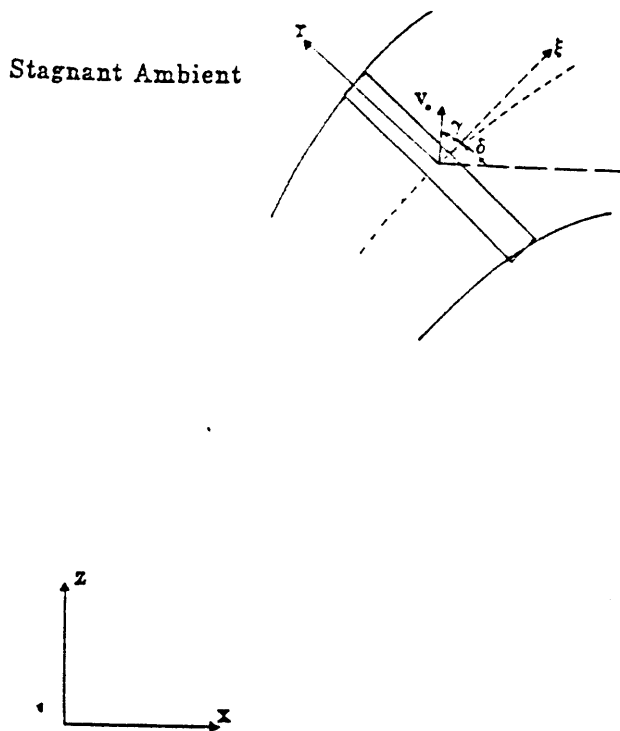


Fig. 11.1.3. Moto relativo di un elemento del getto di densità. Si noti che il fluido ambiente, nel sistema di riferimento relativo, è in quiete.

di densità e il fluido ambiente in moto è soggetta a differenti interpretazioni da parte degli autori che hanno studiato fenomeni analoghi. Winiarski e Frick (1976, 1978) calcolarono l'intrusione legata ai due meccanismi di cui si è detto in precedenza, concludendo che la portata totale di intrusione è inferiore alla somma delle singole portate di intrusione radiale e forzata. Frick (1981) e Chin (1988) arrivarono ad una conclusione opposta, ritenendola più realistica. Ed è proprio su tale conclusione che si basa la formulazione del modello matematico di Chin (1988), in cui oltre al classico coefficiente di intrusione α legato alle componenti longitudinali del getto, si fa uso di un coefficiente di intrusione forzato β .

Le equazioni che governano il moto e la diluizione dell'elemento cilindrico del getto mostrato in fig. 11.1.3 sono le seguenti:

1) *Equazione della conservazione della quantità di moto in direzione orizzontale*

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \int_0^{\infty} v^2 (\cos \gamma) \cos(\gamma + \delta) r dr = 0 \quad (11.1.4)$$

2) *Equazione della quantità di moto in direzione assiale*

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \int_0^{\infty} (v \cos \gamma)^2 r dr = (\sin \delta) \int_0^{\infty} \frac{\Delta \rho}{\rho_0} g r dr \quad (11.1.5)$$

dove $\Delta \rho$ è il cosiddetto *deficit di densità* e ρ_0 è la densità del fluido ambiente al livello dello scarico.

3) *Equazione di conservazione dei volumi*

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \int_0^{\infty} v (\cos \gamma) r dr = \alpha v_0 (\cos \gamma) b + \frac{\beta v_0 (\sin \gamma) b}{\pi} \quad (11.1.6)$$

dove α è il coefficiente di intrusione radiale e β è il coefficiente di intrusione forzato, di cui si è detto in precedenza. Chin (1988) assume che l'intrusione radiale sia simmetrica rispetto all'asse ξ e che l'intrusione forzata avvenga solo su un lato del getto di densità. Come si è visto nei capitoli precedenti, α rappresenta il rapporto della velocità di intrusione radiale e la velocità assiale del getto, mentre β rappresenta la percentuale del fluido ambiente che urta lateralmente contro il getto mescolandosi con esso.

4) *Equazione di conservazione della massa*

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \int_0^{\infty} (v \cos \gamma) (\rho_{\infty} - \rho) r dr = \int_0^{\infty} v r \frac{\partial \rho_{\infty}}{\partial \xi} dr \quad (11.1.7)$$

dove ρ_{∞} è la densità del fluido ambiente all'altezza dell'elemento. Nella precedente equazione si ipotizza che il fluido ambiente sia stratificato. Evidentemente il secondo termine della precedente relazione si annullerebbe in caso di assenza di stratificazioni.

5) *Equazione di conservazione del soluto*

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \int_0^{\infty} (v \cos \gamma) c r dr = 0 \quad (11.1.8)$$

dove c è la concentrazione del soluto.

Si assume che la differenza di densità e la distribuzione della concentrazione abbiano un andamento gaussiano, dato, rispettivamente, dalle seguenti relazioni

$$\Delta \rho = \Delta \rho_0 \exp\left(-\frac{r^2}{\lambda^2 b^2}\right) \quad (11.1.9)$$

$$c = c_0 \exp\left(-\frac{r^2}{\lambda^2 b^2}\right) \quad (11.1.10)$$

dove $\Delta \rho_0$ e c_0 sono i valori lungo l'asse di $\Delta \rho$ e c , rispettivamente, e λ è il numero di Schmidt, definito come il rapporto tra la viscosità cinematica e il coefficiente di diffusività.

Il comportamento del getto di densità è legato alla scala di lunghezza Z_B

$$Z_B = \frac{B}{u_M^3} \quad (11.1.11)$$

dove con B si è indicato il flusso specifico della spinta di galleggiamento in corrispondenza dell'orifizio e con u_M la velocità media orizzontale del moto ondoso all'orifizio. La scala di lunghezza Z_B rappresenta la distanza dall'ugello oltre la quale il campo di moto è dominato dalle onde. Assumendo $h/Z_B \gg 1$, allora l'azione delle onde domina sul campo di moto del getto per la maggior parte dell'altezza di risalita. Inoltre, se la componente orizzontale di velocità del moto ondoso è molto più grande della componente verticale, ossia se $u \gg w$, è presumibile che il getto sia significativamente deviato dalla velocità del fluido ambiente. Chin (1987) mostrò che le ipotesi $h/Z_B \gg 1$ e $u \gg w$ sono realistiche per scarichi in mari poco profondi, per i quali gli effetti delle onde sono importanti e l'asse ξ è vicino all'asse x

di fig. 11.1.2, nell'ipotesi di scarichi orizzontali. Sotto queste condizioni la componente x della velocità relativa in asse, $v_0 \cos(\gamma + \delta)$, può essere approssimata da $v_0(\cos\gamma)(\cos\delta)$. A tal riguardo, si faccia riferimento a quanto riportato in Appendice.

Pertanto, combinando le eqq.11.1.4-11.1.8 con le eqq.11.1.9 e 11.1.10 e adimensionalizzando si ottiene

$$\frac{\partial v_{\xi}^*}{\partial \xi^*} = \frac{2\lambda^2(\sin\delta)\Delta\rho^*}{v_{\xi}^* F_0^2} - \frac{2v_{\xi}^*}{b^*} \left(\alpha + \beta \frac{\tan\gamma}{\pi} \right) \quad (11.1.12)$$

$$\frac{\partial b^*}{\partial \xi^*} = 2 \left(\alpha + \beta \frac{\tan\gamma}{\pi} \right) - \frac{\lambda^2 \Delta\rho_0^* b^* \sin\delta}{(v_{\xi}^*)^2 F_0^2} \quad (11.1.13)$$

$$\frac{\partial \Delta\rho_0^*}{\partial \xi^*} = \frac{1+\lambda^2}{\lambda^2} \frac{d\rho_{\infty}^*}{dz^*} \sin\delta - 2 \left(\alpha + \beta \frac{\tan\gamma}{\pi} \right) \frac{\Delta\rho_0^*}{b^*} \quad (11.1.14)$$

$$\frac{\partial \delta}{\partial \xi} = \frac{2\lambda^2 \Delta\rho_0^* \cos\delta}{(v_{\xi}^*)^2 F_0^2} \quad (11.1.15)$$

$$\frac{\partial c^*}{\partial \xi^*} = -2 \left(\alpha + \beta \frac{\tan\gamma}{\pi} \right) \frac{c^*}{b^*} \quad (11.1.16)$$

L'asterisco indica che le grandezze sono adimensionali. Esse sono così definite

$$v_{\xi}^* = \frac{v_0 \cos\gamma}{v_D} \quad (11.1.17)$$

con v_D velocità allo scarico

$$\xi^* = \frac{\xi}{D} \quad (11.1.18)$$

con D diametro dell'ugello

$$\Delta \rho_0^* = \frac{\Delta \rho_0}{\rho_0} \quad (11.1.19)$$

$$b^* = \frac{b}{D} \quad (11.1.20)$$

$$c^* = \frac{c}{c_D} \quad (11.1.21)$$

con c_D concentrazione allo scarico, e

$$F_0 = \frac{v_D}{(gD)^{1/2}} \quad (11.1.22)$$

Si dimostra che δ e γ sono legati dalla seguente relazione

$$\delta = \operatorname{atan} \left[\frac{w + v_0 \sin(\delta + \gamma)}{u + v_0 \cos(\delta + \gamma)} \right] \quad (11.1.23)$$

Si assume, inoltre, che

$$dx^* = (\cos \delta) d\xi^* + \frac{u}{D} dt \quad (11.1.24)$$

$$dz^* = (\sin\delta)d\xi^* + \frac{w}{D}dt \quad (11.1.25)$$

con x^* e z^*

$$x^* = \frac{x}{D} \quad (11.1.26)$$

$$z^* = \frac{z}{D} \quad (11.1.27)$$

Le eqq. 11.1.12-16 e 11.1.23-25 devono essere risolte simultaneamente, ottenendo i valori di v_0^* , b^* , $\Delta\rho_0^*$, δ , γ , c^* , x^* e z^* con

$$v_0^* = \frac{v_0}{v_D} \quad (11.1.28)$$

Per quanto riguarda i valori iniziali da assumere, essi possono essere quelli relativi alla fine della zona del *core*, alla fine, cioè, della ZFE (*zone of flow establishment*). In assenza di moto del fluido ambiente, la lunghezza s_e della ZFE, per un getto di densità, è data (si veda Abraham, 1963) da

$$\left\{ \begin{array}{ll} s_e^* = 2.8F^{2/3} & F < 2 \\ s_e^* = 0.113F^2 + 4 & 2 \leq F \leq 3.2 \\ s_e^* = \frac{5.6F^2}{(F^2 + 18)^{1/2}} & F > 3.2 \end{array} \right. \quad (11.1.29)$$

con

$$s_e^* = \frac{s_e}{D} \quad (11.1.30)$$

ed F numero di Froude densimetrico allo scarico. Nel caso di fluido ambiente in moto, la lunghezza della ZFE può essere stimata usando le eqq. 11.1.29, come proposto da Chin (1988), purchè F sia calcolato come segue

$$F = \frac{v_D - u_s \cos \theta_1}{\left(\frac{\Delta \rho_0}{\rho_0} g D \right)^{1/2}} \quad (11.1.31)$$

con u_s velocità orizzontale del fluido ambiente in corrispondenza dell'orifizio e θ_1 angolo di scarico relativo all'orizzontale. Alla fine della ZFE si può ritenere che le distribuzioni di velocità, del deficit di densità e della concentrazione abbiano un andamento gaussiano con i seguenti valori in asse

$$v_0^* = 1 \quad (11.1.32)$$

$$\Delta \rho_0^* = \frac{1 + \lambda^2}{2\lambda^2} \frac{(\Delta \rho)_D}{\rho_0} \quad (11.1.33)$$

$$c_0^* = \frac{1 + \lambda^2}{2\lambda^2} \quad (11.1.34)$$

con $(\Delta \rho)_D$ deficit di densità al livello dell'orifizio. L'equazione della conservazione della quantità di moto porta a concludere che la larghezza adimensionalizzata del getto di densità alla fine della ZFE sia

$$b^* = \frac{\sqrt{2}}{2}. \quad (11.1.35)$$

Le eqq. 11.1.32-35 sono, dunque, utilizzate per specificare le condizioni iniziali dell'elemento cilindrico del getto di densità.

Il modello di Chin (1988) genera una sequenza di immagini istantanee dell'intero getto di densità col seguente metodo. Nell'istante di tempo $t=0$, il primo elemento del getto è localizzato alla fine della ZFE (con distribuzione gaussiana della velocità relativa v^* , del deficit di densità $\Delta\rho^*$, e della concentrazione c^*). I valori in asse di queste grandezze sono dati dalle eqq. 11.1.32-34. La scala di lunghezza in direzione trasversale al getto è data dall'eq. 11.1.35. Per assegnati incrementi $\Delta\xi$ lungo l'asse istantaneo del getto, le eqq. 11.1.12-16 e 11.1.23-25 sono risolte con metodi numerici. Queste equazioni consentono di ottenere i valori dei parametri del getto alla successiva posizione dell'elemento. L'incremento lagrangiano di tempo associato ad ogni *step* è dato da

$$\Delta t = \frac{\Delta\xi}{v_\xi} \quad (11.1.36)$$

La procedura ora descritta viene ripetuta fino a quando l'elemento del getto raggiunge una certa altezza, oltre la quale non si verifica ulteriore diluizione. Procedendo con opportuni incrementi temporali si potranno ottenere gli andamenti istantanei di v , $\Delta\rho$ e c , relativi a tutto il getto.

Si osserva che il modello contiene due coefficienti di intrusione, α e β . Come già detto precedentemente il processo di intrusione è dovuto al moto relativo del getto rispetto all'ambiente circostante (fig. 11.1.3). Secondo Chin (1988) si può ritenere che α non differisca significativamente dal caso di fluido ambiente in quiete. Per stimare β , invece, sono necessari dei dati sperimentali; secondo Frick (1981), β è circa uguale a 1.

11.2. Validazione del modello.

La validazione del modello è stata realizzata da Chin (1988) come segue:

1) le previsioni del modello sono state confrontate con i risultati sperimentali di Chin

(1987), riportati nel cap. 8, ponendo β uguale ad 1;

2) l'ampiezza delle onde è stata posta uguale a zero e le previsioni del modello sono state confrontate con il modello di Fan e Brooks (1969);

3) le immagini istantanee del getto di densità generate dal modello sono state confrontate con quelle riprese durante le esperienze.

Le simulazioni del modello sono state effettuate per condizioni sperimentali descritte da Chin (1987). I parametri usati nelle simulazioni del modello sono in accordo con le assunzioni $h/Z_B \gg 1$ e $u \gg w$. I risultati sono riportati in fig. 11.2.1, dove S è la diluizione misurata, S_0 è la diluizione nel caso di mancanza di moto ondoso, L_Q e Z_M sono le scale delle lunghezze definite come segue

$$L_Q = \frac{Q}{M^{1/2}} \quad (11.2.1)$$

$$Z_M = \frac{M^{1/2}}{u_{\max}} \quad (11.2.2)$$

essendo M il flusso della quantità di moto allo scarico, Q la portata volumetrica effluente e $u_{\max}$ la velocità massima indotta dalle onde al livello dello scarico. Chin realizzò le simulazioni fissando H/L_M circa uguale a 9, $L_M/L_Q=17$, $\theta_1=\theta_2=0$, con L_M definita come segue

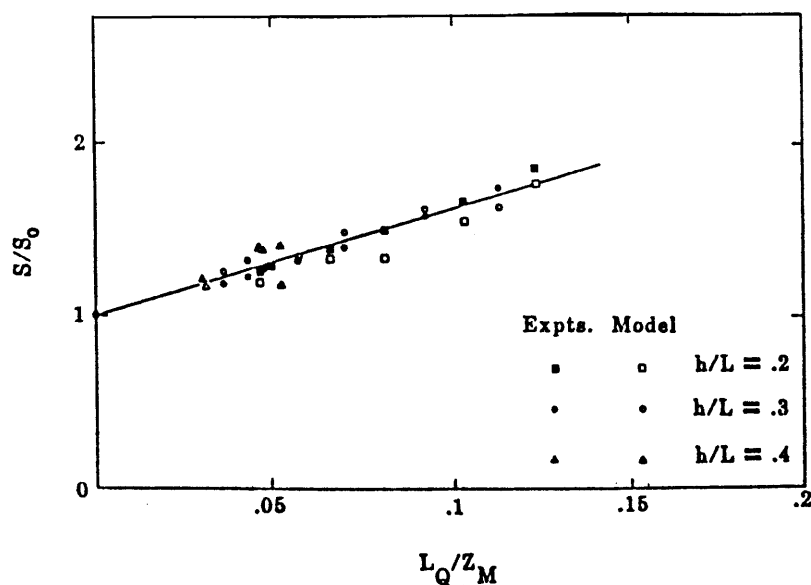


Fig. 11.2.1. Confronto tra i risultati del modello e quelli sperimentali.

(11.1.3)

$$L_M = \frac{M^{3/4}}{B^{1/2}}$$

e avendo indicato con H la profondità dello scarico, con B il flusso specifico della spinta di galleggiamento, con θ_1 l'angolo tra la direzione di immissione del getto rispetto alla direzione orizzontale e con θ_2 l'angolo tra la direzione di immissione del getto e la direzione di propagazione delle onde. La diluizione media, S , dell'elemento del getto nel modello matematico è calcolata usando la relazione

$$S = \sqrt{2} \frac{C_D}{C_0} \quad (11.1.4)$$

Come è stato evidenziato nel cap. 8, Chin (1987) ha mostrato che gli scarichi in acque poco profonde subiscono un significativo incremento di diluizione con la presenza di un moto ondoso, rispetto al caso di fluido ambiente in quiete.