POLITECNICO DI BARI - DICATECh

Dipartimento di Ingegneria Civile, Ambientale, del Territorio, Edile e di Chimica

A.A. 2012-2013

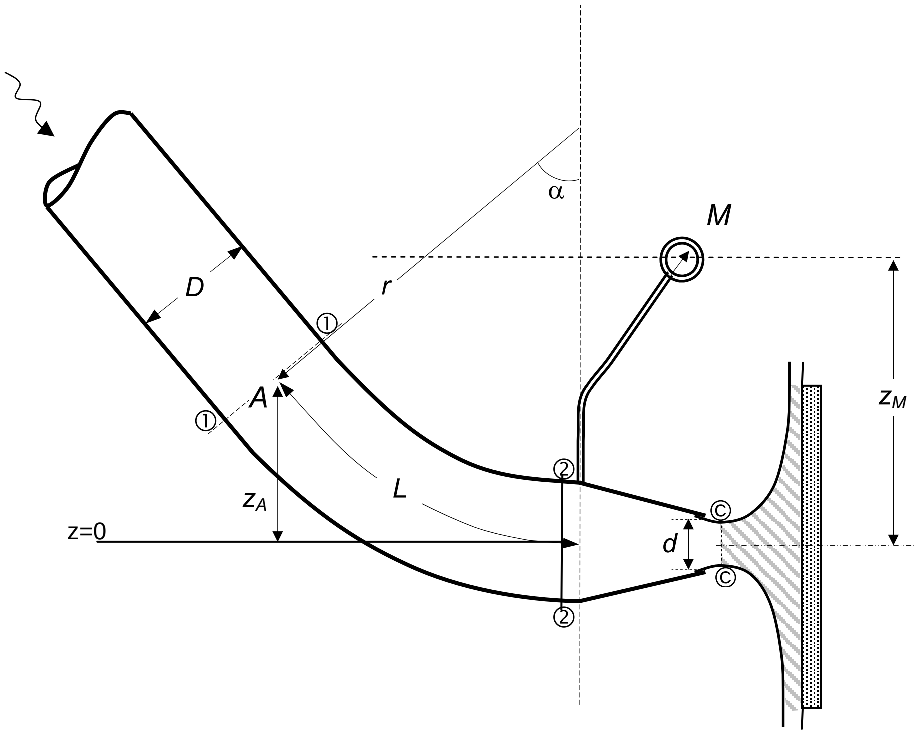
Ingegneria Civile e per l'Ambiente e il Territorio – Ingegneria Meccanica – Sede di Taranto

II ESONERO DI IDRAULICA E MECCANICA DEI FLUIDI

Il getto d'acqua orizzontale, effluente dal bocchello in figura, investe una piastra piana circolare situata su un piano verticale in posizione fissa. Nell'ipotesi di liquido perfetto con densità ρ=1000 kg/m^3 e di moto permanente, si determini:

1. La pressione p_2 nel baricentro della sezione 2 e la portata Q erogata dal bocchello.
2. La spinta $\mathbf{S_p}$ del getto sulla piastra.
3. La spinta **S** esercitata dalla corrente sul tronco di tubazione costituito dalla curvatura e dal bocchello (ossia sul tronco compreso tra le sezioni 1-1 e C-C), trascurando la forza peso.

I diametri della tubazione e della sezione terminale del bocchello sono rispettivamente D e d. La lunghezza del tratto curvo di tubazione (con raggio di curvatura r) è L. Inoltre, sono noti l'indicazione n in Pa del manometro metallico M inserito nella sezione 2 e posto a quota z_M . Si assuma unitario il coefficiente di contrazione C_c.



Dati: D=0,10 m, d=0,03 m, r=20,00 m, L=10,00 m, n = 2,5·10^5 Pa, z_M = 3,0 m.

SOLUZIONE

Assumiamo come piano di riferimento per le quote z il piano orizzontale passante per il baricentro della sezione terminale del bocchello. Diamo inoltre valore unitario ai coefficienti di ragguaglio di Coriolis α e β in tutte le sezioni d'interesse.

Applicando il teorema di Bernoulli fra la sezione *2* e la sezione contratta, si ha:

$$z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2g} = z_c + \frac{V_c^2}{2g} \;.$$

Essendo: $z_2=0$; $z_c=0$; $V_2=Q/A_2$; $A_2=\pi D^2/4$; $V_c=Q/A_c$; $A_c=c_c\pi d^2/4$, si ottiene:

$$\frac{p_2}{\gamma} = \frac{Q^2}{2g}\left(\frac{1}{A_c^2} - \frac{1}{A_2^2}\right) .$$

Ammettendo, con ragionevole approssimazione, che nella sezione *2* la corrente sia lineare, la quota piezometrica di tale sezione è:

$$0 + \frac{p_2}{\gamma} = z_M + \frac{n}{\gamma},$$

per cui la fornisce:

$$Q = \sqrt{2g\left(z_M + \frac{n}{\gamma}\right)\left(\frac{A_c^2 A_2^2}{A_2^2 - A_c^2}\right)} \;.$$

Applichiamo l'equazione globale al volume liquido limitato dalla sezione contratta, dalla superficie di contorno della vena, dalla piastra e dalla superficie cilindrica a generatrici orizzontali che ha come base il contorno della piastra stessa (cioè, il volume tratteggiato in figura), in condizioni di moto permanente ($\vec{I} = 0$). Si ha:

$$\vec{G} + \vec{\Pi}_c + \vec{\Pi}_v + \vec{\Pi}_p + \vec{\Pi}_{cil} + \vec{M}_c - \vec{M}_{cil} = \vec{0} \;;$$

ove $\vec{G}$ è il peso del volume liquido considerato, $\vec{\Pi}_c$ la spinta sulla sezione contratta, $\vec{\Pi}_v$ la spinta dell'atmosfera sulla superficie di contorno della vena, $\vec{\Pi}_p$ la spinta esercitata sul liquido dalla piastra (che è uguale e contraria alla forza $\vec{S}_p$ cercata), $\vec{\Pi}_{cil}$ la spinta sulla superficie cilindrica di uscita, $\vec{M}_c$ il flusso di quantità di moto attraverso la sezione contratta e $\vec{M}_{cil}$ il flusso di quantità di moto attraverso la superficie cilindrica di uscita.

La spinta $\vec{S}_p$ subita dalla piastra risulta:

$$\vec{S}_p = -\vec{\Pi}_p = \vec{G} + \vec{\Pi}_c + \vec{\Pi}_v + \vec{\Pi}_{cil} + \vec{M}_c - \vec{M}_{cil} \;.$$

Ma $\vec{\Pi}_c = \vec{\Pi}_v = \vec{\Pi}_{cil} = \vec{0}$, perché sulle tre superfici corrispondenti la pressione relativa è nulla.
Pertanto la precedente equazione si riduce all'espressione

$$\vec{S}_p = \vec{G} + \vec{M}_c - \vec{M}_{cil} \;.$$

Si osservi, ora, che la spinta $\vec{S}$ deve essere necessariamente ortogonale alla piastra, perché l'ipotesi di liquido perfetto esclude la presenza di tensioni tangenziali. Perciò i vettori $\vec{S}_p$ $\vec{M}_c$ sono orizzontali e i vettori $\vec{G}$ ed $\vec{M}_{cil}$ verticali. Sicché, proiettando sulla verticale questa equazione, ci assicura che $\vec{G}$ ed $\vec{M}_{cil}$ si equilibrano e si riduce conseguentemente alla

$$\vec{S}_p = \vec{M}_c \; .$$

Dunque la spinta sulla piastra è orizzontale, di modulo:

$$S_p = \rho Q V_c .$$

Applichiamo l'equazione globale al volume liquido limitato dalla sezione *1*, dalla sezione contratta, dalla tubazione e dal bocchello e dal contorno della vena fra la sezione di sbocco e la sezione contratta, in condizioni di moto permanente ($\vec{I} = 0$). Si ha:

$$\vec{G}_1 + \vec{\Pi}_1 + \vec{\Pi}_c + \vec{\Pi}_t + \vec{\Pi}_{ven} + \vec{M}_1 - \vec{M}_c = \vec{0} \; ;$$

ove $\vec{G}_1$ (peso del volume liquido considerato) trascurabile, $\vec{\Pi}_1$ la forza esercitata sulla sezione *1*, $\vec{\Pi}_c$ la spinta della sezione contratta, $\vec{\Pi}_t$ la forza di superficie sulla tubazione e sul bocchello (che è uguale e contraria alla spinta $\vec{S}$ cercata), $\vec{\Pi}_{ven}$ la forza dell'atmosfera sul contorno della vena effluente, $\vec{M}_1$ il flusso di quantità di moto entrante nel volume attraverso la sezione *1* e $\vec{M}_c$ il flusso di quantità di moto uscente attraverso la sezione contratta. La spinta $\vec{S}$ subita dal tronco di tubazione a valle della sezione *1* risulta:

$$\vec{S} = -\vec{\Pi}_t = +\vec{\Pi}_1 + \vec{\Pi}_c + \vec{\Pi}_{ven} + \vec{M}_1 - \vec{M}_c$$

Ma $\vec{\Pi}_c = \vec{\Pi}_{ven} = \vec{0}$ perché sulle due superfici corrispondenti la pressione relativa è nulla. Pertanto si ha

$$\vec{S} = +\vec{\Pi}_1 + \vec{M}_1 - \vec{M}_c$$

Detto $\alpha[\mathrm{rad}] = \frac{L}{r} = \alpha[°] = \frac{L}{r}\frac{360°}{2\pi}$ l'angolo al centro del tratto curvo di tubazione, le due componenti, orizzontale e verticale, della spinta $\vec{S}$ sono:

$$S_o = \Pi_1 \cos\alpha + M_1 \cos\alpha - M_c \quad ; \quad S_o = \Pi_1 \sin\alpha + M_1 \sin\alpha \; ;$$

ove, detta p_A la pressione nel baricentro *A* della sezione *1*:

$$\Pi_1 = p_A \frac{\pi D^2}{4} ; M_1 = \rho Q V_1 \; ; \; M_c = \rho Q V_c$$

Per ricavare la pressione p_A si applica il teorema di Bernoulli tra la sezione *1* e la sezione *2*, poiché i diametri delle sezioni sono uguali e quindi $V_1 = V_2$, le quote piezometriche risultano pure eguali:

$z_A + \frac{p_A}{\gamma} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} = z_M + \frac{n}{\gamma}$,

e ne segue

$p_A = \gamma\left(z_M - z_A\right) + n$,

(con $z_A = r(1 - \cos\alpha)$).

Il modulo della spinta $\vec{S}$ risulta $S = \sqrt{S_o^{\,2} + S_v^{\,2}}$.

Considerando i seguenti valori numerici (dati):

D = 0,10 m
d = 0,03 m
r = 20,00 m
L = 10,00 m

$n = 2{,}5 \cdot 10^5$ Pa
z_m = 3,0 m
c_c = 1

RISULTATI

A_2 = 0,007854 m^2
A_c = 0,000707 m^2
P_2 = 279300 Pa
Q = 0,0168 m^3/s
V_c = 23,76 m/s
M_c = 399.2 N
S_p = 399.2 N
α=28°39'30"
z_A = 2,449 m
S_o = 1393 N
S_v = 979 N
S=2302,5N